Sprachen & Automaten

- formale Sprachen zur Formulierung von Wissen
  Programmiersprachen
  Logik
  Teilmengen natürlicher Sprachen
  ...
- Beschreibung formaler Sprachen durch Grammatiken
- Beschreibung und Verarbeitung formaler Sprachen durch Automaten, d.h. abstrakte Maschinen
- Klassifizierung formaler Sprachen
  Typen von Sprachen ↔
  Typen von Grammatiken ↔
  Typen von Automaten
- wichtige Typen formaler Sprachen und Automaten
  reguläre Sprachen ↔ *endliche Automaten*
  kontextfreie Sprachen ↔ *Kellerautomaten*

Grundlagen

- Alphabet A
  endliche, nichtleere Menge von Buchstaben
- Wort
  endliche Aneinanderreihung (Konkatenation) von Elementen aus A
- leeres Wort
  ε
- Menge aller Wörter A^*
  Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus A
  $A^* = \{a_1a_2 \dots a_n \mid a_i \in A\} \cup \{\varepsilon\}$
  $A^+ = A^* - \{\varepsilon\}$
- Beispiel
  $A = \{a,b\}$
  $A^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, abb, \dots\}$
- Konkatenation
  zweistellige Operation "$\cdot$" : $A^* \times A^* \to A^*$
  $u, v \in A^*$, $u \cdot v$ wird uv geschrieben
- algebraische Struktur $(A^*, \cdot)$ ist Halbgruppe (Monoid)
  $u, v \in A^* \Rightarrow u \cdot v = uv \in A^*$ (Abgeschlossenheit)
  $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w) = uvw$ (Assoziativität)
  $\varepsilon \cdot u = u \cdot \varepsilon = u$ (neutrales Element)

Grundlagen

- Abkürzung
  $u^n = uu \dots u$ (n-mal)
  $u^0 = \varepsilon$
  Beispiele: $a^3 = aaa$, $(ab)^3 = ababab$, $(abc)^0 = \varepsilon$
- Länge eines Wortes w
  $|w|$
  $|\varepsilon| = 0$, $|a_1a_2 \dots a_n| = n$ für $a_i \in A$
  $|uv| = |u| + |v|$, $|u^n| = n \cdot |u|$
  Beispiel: $|abc| = 3$

Sprachen

- Sprachen L über einem Alphabet A
  $L \subseteq A^*$
- L_1 und L_2 Sprachen über A
  $L_1 \cup L_2 = \{u \mid u \in L_1 \text{ oder } u \in L_2\}$ (Vereinigung)
  $L_1 \cap L_2 = \{u \mid u \in L_1 \text{ und } u \in L_2\}$ (Durchschnitt)
  $L_1^C = A^* - L_1$ (Komplement)
  $L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \text{ und } v \in L_2\}$ (Produkt)
- Sprache L
  $L^0 = \{\varepsilon\}$
  $L^1 = L$
  $L^{n+1} = LL^n$
  $L^nL^m = L^{n+m}$
  $(L^n)^m = L^{nm}$

  Kleene-Sternoperation
  $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{u_1u_2 \dots \mid u_i \in L\} \cup \{\varepsilon\}$
  $L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$

Sprachen

- Beispiel

  A = {(,), +, -, *, /, X}

  (X steht für irgendeine Konstante oder Variable)

  Sprache ARIM $\subseteq$ A* der arithmetischen Ausdrücke

X	$\in$ ARIM
X/(X+X) +X*X	$\in$ ARIM
X+*X	$\notin$ ARIM

- Probleme

  Sprachen sind i. A. unendliche Objekte; um damit umgehen zu können, brauchen wir endliche Beschreibungen.

  Welche Worte gehören zur Sprache, welche nicht?

  Diese beiden Fragen werden durch Grammatiken oder (abstrakte) Automaten beantwortet.

Grammatiken

- (Ausschnitt aus einer) Grammatik für ARIM

E → T	(Expression ist Term)
E → E + T	(Expression ist Expression + Term)
T → F	(Term ist Faktor)
T → T*F	(Term ist Term * Faktor)
F → X	(Faktor ist Konstante oder Variable)
F → (E)	(Faktor ist Expression in Klammern)

- Grammatiken sind Regeln der Form

  "linke Seite" → "rechte Seite"

  Bedeutung der Regel: die rechte Seite kann die linke Seite ersetzen

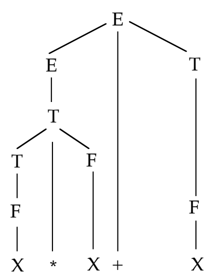
  (Abkürzungen: LHS für linke Seite, RHS für rechte Seite)

- Regeln enthalten Nichtterminalsymbole (z.B. E, T, F) und Terminalsymbole (z.B. X)
- Regeln werden solange angewendet, bis das abgeleitete Wort nur noch aus Terminalsymbolen besteht
- jedes so abgeleitete Wort gehört zu der von der Grammatik definierten (erzeugten) Sprache
- Beispiel

  E ⇒ E + T ⇒ T + T ⇒ T*F +T ⇒ F*F +T ⇒ X*F +T ⇒ X*X +T ⇒ X*X +F ⇒ X*X +X

Grammatiken

- Ableitung kann als Syntaxbaum dargestellt werden



- bei der Ableitung wurde immer das am weitesten links stehende Nichtterminal ersetzt (Linksableitung)

Grammatiken

- (Phrasenstruktur-) Grammatik G ist ein Quadrupel

  G = (N, T, S, R)

  N endliche Menge von Nichtterminalsymbolen

  T endliche Menge von Terminalsymbolen

  $N \cap T = \emptyset$

  $S \in N$ ist das Startsymbol

  R ist eine endliche Menge von Regeln (Produktionen)

  $R \subseteq (N \cup T)^+ \times (N \cup T)^*$

- seien u= xyz, v=xy'z mit $x, z \in (N \cup T)^*$

  Relation $u \rightarrow_G v$ (u geht unter G unmittelbar in v über) falls

  y → y' eine Regel in R ist

- G erzeugt (definiert) die Sprache

  $L(G) = \{w \in T^* \mid S \rightarrow_G^* w\}$

  $\rightarrow_G^*$ ist die reflexiv transitive Hülle von $\rightarrow_G$

- Grammatiken heissen äquivalent, wenn sie die gleiche Sprache erzeugen

Grammatiken

- Folge von Wörtern (w_0, w_1, ... , w_n) mit w_0 = S und $w_n \in T^*$ und $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n$ heisst (maximale) Ableitung von w_n
- Anwendung einer Regel $y \rightarrow y'$, die aus dem Wort xyz das Wort xy'z macht, heisst linksmaximal (rechtsmaximal), wenn es keine Regel gibt, in der y weiter links (rechts) auftritt, als in der Zerlegung xyz
- Linksableitung (Rechtsableitung) ist eine maximale Ableitung, deren Regelanwendungen alle linksmaximal (rechtsmaximal) sind
- Beispiel einer Grammatik G = (N, T, S, R)

  N = {S, B, C}

  T = {a, b, c}

  R = {S → aSBC, S → aBC, CB → BC, aB → ab, bB → bb, bC → bc, cC → cc}

  S ⇒ aSBC ⇒ aaBCBC ⇒ aabCBC ⇒ aabBCC ⇒ aabbCC ⇒ aabbcC ⇒ aabbcc = $a^2b^2c^2$

  L(G) = $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$

  Wieso?

Formale Grundlagen der Informatik

Chomsky Hierarchie

- Noam Chomsky hat Grammatiken – und die damit assoziierten Sprachen – in 4 Typen eingeteilt und es gilt

  Typ 3 ⊂ Typ 2 ⊂ Typ 1 ⊂ Typ 0
- Typ 0: Phrasenstrukturgrammatiken

  Regeln LHS → RHS

  es gibt bezüglich LHS und RHS keine Einschränkungen
- Typ 1: kontextsensitive Grammatiken

  für alle Regeln LHS → RHS gilt |LHS| ≤ |RHS|

  Beispiel:

  R = {S → aSBC, S → aBC, CB → BC, aB → ab, bB → bb, bC → bc, cC → cc}

  man beachte, dass die Nichtterminale B und C in LHS je nach Kontext durch ein anderes RHS ersetzt werden

  erzeugte Sprache $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$ ist kontextsensitiv

Formale Grundlagen der Informatik

Chomsky Hierarchie

- Typ 2: kontextfreie Grammatiken

  für alle Regeln LHS → RHS gilt |LHS| ≤ |RHS| **und zusätzlich** LHS ∈ N

  kontextfreie Regel N → RHS: Nichtterminal N kann bedingungslos – in jedem Kontext – durch RHS ersetzt werden

  Beispiel:

  R = {S → ab, S → aSb}

  erzeugte Sprache $\{a^nb^n \mid n \geq 1\}$ ist kontextfrei

  Beispiel:

  Sprache ARIM der arithmetischen Ausdrücke ist kontextfrei
- Typ 3: reguläre Grammatiken

  für alle Regeln LHS → RHS gilt |LHS| ≤ |RHS| und LHS ∈ N **und zusätzlich:** RHS ist entweder ein einzelnes Terminalzeichen, oder ein Terminalzeichen gefolgt von einem Nichtterminalzeichen, oder ein Nichtterminalzeichen gefolgt von einem Terminalzeichen

  Beispiel:

  R = {S → a, S → aS} oder alternativ R = {S → a, S → Sa}

  erzeugte Sprache $\{a^n \mid n \geq 1\}$ ist regulär

Formale Grundlagen der Informatik

Chomsky Hierarchie

- Sprache $L \subseteq T^*$ heisst vom Typ X, wenn eine Grammatik vom Typ X – **aber** keine vom Typ X+1 – die Sprache L erzeugen kann

  (Eine Sprache vom Typ X kann natürlich auch durch Grammatiken vom Typ X-1 erzeugt werden.)
- alle Sprachen vom Typ 1, 2, 3 sind entscheidbar, d.h. es gibt einen Algorithmus, der bei der Eingabe einer Grammatik G und eines Wortes w nach endlicher Zeit feststellt, ob w ∈ L(G) oder nicht
- Sprachen vom Typ 0 werden auch rekursiv aufzählbar genannt; sie sind semi-entscheidbar
- Typ 0 Grammatiken sind endliche Objekte, d.h. die Menge aller Typ 0 Grammatiken ist abzählbar, d.h. hat die Kardinalität von **N**; da jeder Typ 0 Sprache mindestens eine Typ 0 Grammatik zugeordnet werden kann, ist die Menge aller Typ 0 Sprachen ebenfalls abzählbar
- Menge aller Sprachen ist überabzählbar, hat die Kardinalität von **R** – schon Potenzmenge von {0, 1}* ist überabzählbar
- es gibt also Sprachen, die nicht durch Grammatiken beschrieben werden können

Chomsky Hierarchie

Typ	Sprache	Grammatik	Maschine	Sprachzuge-hörigkeit
3	regulär	linkslinear rechtslinear linksregulär rechtsregulär	endlicher Automat	entscheidbar
2	kontextfrei	kontextfrei Chomsky Greibach reduziert	Keller-automat	entscheidbar
1	kontext-sensitiv	Kontext-sensitiv Kuroda	linear beschränkte Turing-Maschine	entscheidbar
0	rekursiv aufzählbar	allgemein separiert normal	Turing-Maschine	semi-entscheidbar

Chomsky Hierarchie

- in der praktischen Informatik spielen vor allem die regulären und die kontextfreien Sprachen eine Rolle

- viele Probleme sind allerdings kontextsensitiv; man versucht dann, mit kontextfreien Grammatiken zu arbeiten und die Kontextbedingungen durch nicht-grammatische Zusatzbedingungen zu behandeln

  Beispiele:

  Für Sprachen wie Pascal oder Modula werden kontextfreie Grammatiken verwendet, obwohl Typprüfungen, Kontrolle von Parametern in Prozeduraufrufen, Verwendung von vorher deklarierten Objekten etc. eigentlich kontextsensitiv sind; diese Kontrollen werden durch zusätzliche Algorithmen erledigt.

  Bei der Verarbeitung natürlicher Sprache durch den Computer führt die Numerusunterscheidung – Singular oder Plural – zu Kontextsensitivität; man verwendet trotzdem kontextfreie Regeln, z. B. je einen Satz von Regeln für Singular und einen für Plural. Sogenannte Definite Clause Grammatiken erlauben eine kompaktere Darstellung.

Reguläre Sprachen (Typ 3)

- reguläre Sprachen werden durch lineare und reguläre Grammatiken beschrieben

- linkslineare Grammatik

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal und rechts entweder genau ein Terminal oder genau ein Nichtterminal gefolgt von genau einem Terminal.

  $N \rightarrow T \quad N \rightarrow NT$

- rechtslineare Grammatik

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal und rechts entweder genau ein Terminal oder genau ein Terminal gefolgt von genau einem Nichtterminal.

  $N \rightarrow T \quad N \rightarrow TN$

- linksreguläre Grammatik

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal und rechts entweder genau ein Terminal oder genau ein Nichtterminal gefolgt von genau einem Terminal oder das leere Wort ε.

  $N \rightarrow T \quad N \rightarrow NT \quad N \rightarrow \varepsilon$

- rechtsreguläre Grammatik

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal und rechts entweder genau ein Terminal oder genau ein Terminal gefolgt von genau einem Nichtterminal oder das leere Wort ε.

  $N \rightarrow T \quad N \rightarrow TN \quad N \rightarrow \varepsilon$

Reguläre Sprachen (Typ 3)

- für eine reguläre oder Typ 3 Sprache $L \subseteq T^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent

  $L\backslash\{\varepsilon\}$ wird durch eine linkslineare Grammatik beschrieben.

  $L\backslash\{\varepsilon\}$ wird durch eine rechtslineare Grammatik beschrieben.

  L wird durch eine linksreguläre Grammatik beschrieben.

  L wird durch eine rechtsreguläre Grammatik beschrieben.

- Pumping Lemma

  Eine Version des sogenannten Pumping Lemma wird verwendet, um nachzuweisen, dass Sprachen – z.B. $L=\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ – **nicht** regulär sind.

- reguläre Sprachen sind unter Vereinigung, Durchschnitt, Konkatenation, Sternbildung, Komplement und Spiegelung abgeschlossen

Automaten

- Automaten sind abstrakte Maschinen
- konkrete Maschinen in Hardware und Software – z.B. Billetautomaten, Computer, Menusteuerung eines Computers, Compiler – sind oft Realisierungen von Automaten
- Automaten haben endlich viele Zustände; es gibt ausgezeichnete Anfangs- und Endzustände
- zwischen Zuständen kann es Übergänge geben, die durch Eingaben – z.B. das Einlesen eines Buchstaben oder eines Wortes – ausgelöst werden
- liest der Automat ein Wort, dann geht er in einen neuen Zustand über, der vom vorherigen Zustand und vom eingelesenen Wort abhängt
- deterministischer Automat: Folgezustand ist eindeutig bestimmt
- nichtdeterministischer Automat: es kann mehrere Folgezustände geben
- ausserdem kann ein Automat einen Speicher haben
- Automaten werden in Klassen eingeteilt, die die Chomsky Hierarchie der Sprachen widerspiegelt
- jedem Sprachtyp kann eindeutig eine Automatenklasse zugeordnet werden und umgekehrt

Endliche Automaten

- endlicher Automat M ist ein Quadrupel M = (Z, A, z_0, t)

  Z endliche Menge von Zuständen

  A endliches Eingabealphabet

  $z_0 \in Z$ Anfangszustand

  t Zustandsübergangsfunktion Z x A → P(Z)

- t(z,a) ist die Menge aller Zustände, die der Automat M einnehmen kann, wenn er im Zustand $z \in Z$ den Buchstaben $a \in A$ liest
- wenn t(z,a) für jedes Paar (z,a) genau ein Element enthält, dann nennt man den endlichen Automaten **deterministisch**; in allen anderen Fällen, speziell wenn t(z,a) mehr als ein Element enthält, **nichtdeterministisch**
- Beispiel für deterministischen endlichen Automaten

  $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

  $A = \{a,b\}$

  $t(z_0,a) = \{z_1\}$ $t(z_2,a) = \{z_3\}$

  $t(z_0,b) = \{z_3\}$ $t(z_2,b) = \{z_1\}$

  $t(z_1,a) = \{z_2\}$ $t(z_3,a) = \{z_0\}$

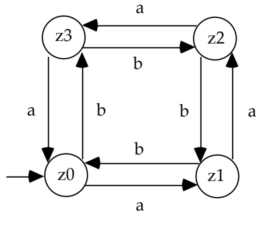
  $t(z_1,b) = \{z_0\}$ $t(z_3,b) = \{z_2\}$

Endliche Automaten

- Automatentafel des gleichen deterministischen endlichen Automaten

	a	b
z_0	z_1	z_3
z_1	z_2	z_0
z_2	z_3	z_1
z_3	z_0	z_2

- graphische Darstellung des gleichen deterministischen endlichen Automaten



Endliche Automaten

- akzeptierender endlicher Automat M ist ein Quintupel M = (Z, A, z_0, t, E)

  (Z, A, z_0, t) endlicher Automat

  $E \subseteq Z$ endliche Menge von Endzuständen

- Wort aus Eingabebuchstaben wird vom Automaten akzeptiert, wenn es zu diesem Wort eine Folge von Zustandsübergängen gibt, die im Anfangszustand beginnt und in einem Endzustand endet
- zu jedem akzeptierenden Automaten M gibt es eine Sprache $L(M) \subseteq A^*$, die M akzeptiert
- sei t^* als Funktion $Z \times A^* \rightarrow P(Z)$ definiert durch

  $t^*(z,\varepsilon) = \{z\}$ $z \in Z$

  $t^*(z,ax) = t^*(t(z,a),x)$ $a \in A, x \in A^*$

  dann akzeptiert M die Sprache

  $L(M) = \{x \in A^* \mid t^*(z_0, x) \in E\}$

- Jede durch einen (nicht-) deterministischen endlichen Automaten akzeptierte Sprache ist regulär (Typ 3).
- Jede reguläre Sprache wird durch einen (nicht-) deterministischen endlichen Automaten akzeptiert.

Endliche Automaten

- Beispiel eines deterministischen akzeptierenden endlichen Automaten

  $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

  $A = \{a,b\}$

  $E = \{z_3\}$

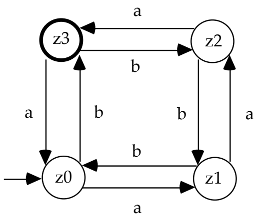
  $t(z_0,a) = \{z_1\}$ $\quad t(z_2,a) = \{z_3\}$

  $t(z_0,b) = \{z_3\}$ $\quad t(z_2,b) = \{z_1\}$

  $t(z_1,a) = \{z_2\}$ $\quad t(z_3,a) = \{z_0\}$

  $t(z_1,b) = \{z_0\}$ $\quad t(z_3,b) = \{z_2\}$

- graphische Darstellung des Automaten



- Beispielautomat landet nach den Worten b, bab, aaa, abb, bbbbb, ... im Endzustand z_3, er "akzeptiert" diese Worte

Reguläre Sprachen

- Konstruktion eines nichtdeterministischen endlichen Automaten $M = (Z, A, S_M, t, E)$, der die durch eine rechtslineare Grammatik $G = (N, T, S_G, R)$ erzeugte reguläre Sprache $L(G)$ akzeptiert

  $Z = N \cup \{\text{accepted}\} \cup \{\text{not accepted}\}$

  $A = T$

  $S_M = S_G$

  $E = \{\text{accepted}\}$

  Grammatikregel von der Art $N_1 \rightarrow TN_2$ definiert den Übergang $t(N_1, T) = N_2$

  Grammatikregel von der Art $N_1 \rightarrow T$ definiert den Übergang $t(N_1, T) = \text{accepted}$

  für alle anderen Paare gilt $t(N, T) = \text{not accepted}$

- Beispiel:

  Grammatik $S \rightarrow aS \mid aA$, $A \rightarrow bA \mid b$ über Alphabet $\{a,b\}$

  $Z = \{S, A, \text{accepted}, \text{not accepted}\}$

  $S \rightarrow aS$ definiert $t(S,a)= \{S\}$

  $S \rightarrow aA$ definiert $t(S,a)= \{A\}$

  $A \rightarrow bA$ definiert $t(A,b) =\{A\}$

  $A \rightarrow b$ definiert $t(A,b) =\{\text{accepted}\}$

  $t(S,b) = t(A,a) = \{\text{not accepted}\}$

- analog konstruiert man eine reguläre Grammatik der von einem endlichen Automaten akzeptierten Sprache

Minimale endliche Automaten

- zwei endliche Automaten heissen äquivalent, wenn sie dieselbe Sprache akzeptieren

- Konstruktion des einfachsten äquivalenten Automaten, der eine gegebene Sprache akzeptiert

  Determinierung:

  nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch einen äquivalenten deterministischen ersetzt

  Vereinfachung:

  Elimination unerreichbarer Zustände

  Reduzierung:

  Elimination von funktionsgleichen Teilautomaten

- Determinierung: zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten $M = (Z, A, z_0, t, E)$ gibt es einen äquivalenten deterministischen $M' = (Z', A', z_0', t', E')$, der Potenzautomat genannt wird.

  $Z' = P(Z) \setminus \{\emptyset\}$

  $A' = A$

  $z_0' = \{z_0\}$

  $t'(X) = \bigcup_{Z \in X} t(z)$ mit $X \subseteq Z$

  $E' = \{X \subseteq Z \mid X \cap E \neq \emptyset\}$

Minimale endliche Automaten

- Beispiel für Determinierung

	a	b	c
z_1	z_1, z_3	z_1, z_2	z_3
z_2	z_1, z_2	z_3	z_1
z_3	z_2, z_3	z_2	z_2, z_3

	a	b	c
$\{z_1\}$	$\{z_1, z_3\}$	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_3\}$
$\{z_2\}$	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_3\}$	$\{z_1\}$
$\{z_3\}$	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_2\}$	$\{z_2, z_3\}$
$\{z_1, z_2\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_3\}$
$\{z_1, z_3\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_2, z_3\}$
$\{z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$
$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_1, z_2, z_3\}$

Minimale endliche Automaten

- Vereinfachung: zu jedem endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten, aus dem die nicht erreichbaren Zustände entfernt wurden

- Beispiel:

	a	b	c
z_0	z_1	z_1	z_2
z_1	z_2	z_2	z_2
z_2	z_0	z_0	z_0
z_3	z_1	z_2	z_3

- Zustand z_3 ist nicht erreichbar, d.h. es gibt keinen Übergang von einem der anderen Zustände z_0 (=Anfangszustand), z_1, z_2

- Streichen der letzten Zeile führt wieder zu einem sinnvollen Automaten

	a	b	c
z_0	z_1	z_1	z_2
z_1	z_2	z_2	z_2
z_2	z_0	z_0	z_0

Minimale endliche Automaten

- zwei Zustände z_1, $z_2 \in Z$ eines endlichen Automaten (Z, A, z_0, t, E) heissen äquivalent, wenn die Automaten (Z, A, z_1, t, E) und (Z, A, z_2, t, E) äquivalent sind, d.h. die Teilautomaten, die in z_1 bzw. z_2 starten, akzeptieren die gleiche Sprache

- ein endlicher Automat heisst reduziert, wenn er keine äquivalenten Zustände enthält

- Zu jedem deterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten, der reduziert ist und Quotientenautomat genannt wird. Die Konstruktion des Quotientenautomaten geschieht über die rekursive Definition von Äquivalenzklassen von Zuständen (Details in Cap).

Minimale endliche Automaten

- Minimalautomaten: bis auf Isomorphie – d.h. Umbenennung der Zustände – gibt es zu jedem endlichen Automaten genau einen äquivalenten deterministischen Automaten, der einfach und reduziert ist. Der Minimalautomat kann durch Determinierung, Vereinfachung und Reduzierung bestimmt werden. Dieses Verfahren kann automatisiert werden.

Endliche Automaten mit Ausgabefunktionen

- endliche Automaten können um Ausgabefunktionen zur Berechnung von Werten erweitert werden

- Moore Automaten M = (Z, E, z_0, t, A, w) haben eine Ausgabefunktion, die vom Zustand abhängt

Z	endliche Menge von Zuständen
E	endliches Eingabealphabet
$z_0 \in Z$	Anfangszustand
t	Zustandsübergangsfunktion $Z \times E \rightarrow Z$
A	endliches Ausgabealphabet
w	Ausgabefunktion: $Z \rightarrow A$

- Mealy Automaten M = (Z, E, z_0, t, A, w) haben eine Ausgabefunktion, die vom Zustand und vom zuletzt gelesenen Eingabewert abhängt

Z	endliche Menge von Zuständen
E	endliches Eingabealphabet
$z_0 \in Z$	Anfangszustand
t	Zustandsübergangsfunktion $Z \times E \rightarrow Z$
A	endliches Ausgabealphabet
w	Ausgabefunktion: $Z \times E \rightarrow A$

- Moore und Mealy Automaten wandeln eine Eingabe in eine gleich lange Ausgabe um

- beide Automaten sind gleichwertig

Kontextfreie Sprachen (Typ 2)

- kontextfreie Sprachen werden durch kontextfreie, Chomsky Normalform, Greibach Normalform und reduzierte Grammatiken beschrieben

- kontextfreie Grammatik

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal.

  $N \rightarrow R$

- Chomsky Normalform

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal und rechts entweder genau ein Terminal oder genau zwei Nichtterminale.

  $N \rightarrow T \quad N \rightarrow NN$

- Greibach Normalform

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal und rechts entweder genau ein Terminal oder genau ein Terminal gefolgt von einem oder mehr Nichtterminalen.

  $N \rightarrow T \quad N \rightarrow TN \quad N \rightarrow TNN$ ...

- reduzierte Grammatik

  Jede Regel hat links genau ein Nichtterminal; wenn es sich nicht um das Startsymbol handelt, stehen rechts nur Terminale; jedes Nichtterminal taucht rechts in einer Regel auf, in der links das Startsymbol steht.

Kontextfreie Sprachen (Typ 2)

- für eine kontextfreie oder Typ 2 Sprache $L \subseteq T^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent

  L wird durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben.

  $L \setminus \{\varepsilon\}$ wird durch eine Grammatik in Chomsky Normalform beschrieben.

  $L \setminus \{\varepsilon\}$ wird durch eine Grammatik in Greibach Normalform beschrieben.

  L wird durch eine reduzierte Grammatik beschrieben.

- Pumping Lemma

  Eine Version des Pumping Lemma wird verwendet, um nachzuweisen, dass Sprachen – z.B. $L=\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ – **nicht** kontextfrei sind.

- kontextfreie Sprachen sind unter Vereinigung, Konkatenation und Sternbildung abgeschlossen

Kellerautomaten

- Kellerspeicher (stack): abstrakter Datentyp über endlichem Kelleralphabet K.

  Keller wird durch Worte K^* repräsentiert.

  Operationen

push:	$K^* \times K^* \rightarrow K^*$	$push(w,k) = wk$
pop:	$K^* \setminus \{\varepsilon\} \rightarrow K^*$	$pop(k_0\, k_1 \dots k_n) = k_1 \dots k_n$
top:	$K^* \setminus \{\varepsilon\} \rightarrow K$	$top(k_0\, k_1 \dots k_n) = k_0$

- Kellerautomat $M = (Z, A, K, z_0, \#, E, t)$ ist ein endlicher Automat mit einem Kellerspeicher.

Z	endliche Menge von Zuständen
A	endliches Eingabealphabet
K	endliches Kelleralphabet
$z_0 \in Z$	Anfangszustand
$\# \in K$	Anfangskellerzeichen
$E \subseteq Z$	endliche Menge von Endzuständen
t	Zustandsübergangsfunktion
	$Z \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times K \rightarrow P(Z \times K^*)$

Kellerautomaten

- Anfang: Zustand z_0, Keller enthält nur #

- später: Zustand z, oberstes Kellerzeichen k, nächstes Eingabezeichen a

  Übergang mit Lesen eines Eingabezeichens:

  Menge $t(z,a,k)$ ist nicht leer: Kellerautomat wählt ein Element (z', k') aus dieser Menge, geht in Zustand z', entfernt k durch pop vom Keller, schreibt mit push k' auf den Keller

  spontaner Übergang ohne Lesen eines Eingabezeichens:

  Menge $t(z,\varepsilon,k)$ ist nicht leer: Kellerautomat wählt ein Element (z', k') aus dieser Menge, geht in Zustand z', entfernt k durch pop vom Keller, schreibt mit push k' auf den Keller

- deterministischer Kellerautomat: in jeder Situation gibt es nur genau einen Übergang

  entweder Übergang mit Lesen oder Übergang ohne Lesen

  Menge der möglichen Übergänge enthält nur ein Element

Kellerautomaten

- Kellererautomat hält an, wenn
  ein Endzustand erreicht oder
  der Keller leer oder
  das ganze Eingabewort gelesen worden ist
- nichtleeres Wort aus Eingabebuchstaben wird vom Kellerautomaten akzeptiert, wenn er das ganze Wort liest und dann hält; es gibt drei gleichwertige Formen der Akzeptanz:
  akzeptiert: Endzustand erreicht und Keller leer
  zustandsakzeptiert: Endzustand erreicht
  kellerakzeptiert: Keller leer (am praktischsten)
- sei $k \in Z \times A^* \times K^*$ eine Konfiguration eines Kellerautomaten M, dann bewirkt eine Anwendung der Zustandsübergangsfunktion t einen Übergang von k zu k', ausgedrückt als Relation $k \Rightarrow k'$. Sei $\Rightarrow^*$ die reflexiv transitive Hülle von $\Rightarrow$.
- Kellerautomat M akzeptiert dann die Sprache

  $L(M) = \{x \in A^* \mid (z_0, x, \#) \Rightarrow^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für } z \in Z\}$
- Jede durch einen nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptierte Sprache ist kontextfrei (Typ 2); jede kontextfreie Sprache wird durch einen nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptiert.

Kellerautomaten

- Beispiel: Palindrom, geschachtelte Ausdrücke

  Kellerautomat für $L=\{a_1a_2...a_n\$a_n...a_2a_1 \mid a_i \in\{a,b\}\}$

  $M = (\{z_0, z_1\}, \{a,b,\$\}, \{\#, A, B\}, z_0, \#, t)$
  (Endzustand wird nicht gebraucht)

  Zustandsübergangsfunktion t als Übergänge zwischen Tupeln $(Z, A, K) \rightarrow (Z', K')$ geschrieben

$z_0a\# \rightarrow z_0A\#$	$z_0aA \rightarrow z_0AA$	$z_0aB \rightarrow z_0AB$
$z_0b\# \rightarrow z_0B\#$	$z_0bA \rightarrow z_0BA$	$z_0bB \rightarrow z_0BB$
$z_0\$\# \rightarrow z_1\#$	$z_0\$A \rightarrow z_1A$	$z_0\$B \rightarrow z_1B$
$z_1aA \rightarrow z_1\varepsilon$	$z_1bB \rightarrow z_1\varepsilon$	$z_1\varepsilon\# \rightarrow z_1\varepsilon$

  Wort ba\$ab $\in L(M)$, denn

  $(z_0, ba\$ab, \#) \Rightarrow (z_0, a\$ab, B\#) \Rightarrow (z_0, \$ab, AB\#) \Rightarrow$
  $(z_1, ab, AB\#) \Rightarrow (z_1, b, B\#) \Rightarrow (z_1, \varepsilon, \#) \Rightarrow (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$

Kellerautomaten

- Sprache der Palindrome über dem Alphabet {a,b, \$} wird durch die folgende kontextfreie Grammatik erzeugt

  $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \$$

  Beweis durch vollständige Induktion
- Wiederholung: Vollständige Induktion
  $A: N_0 \rightarrow \{W, F\}$ eine Eigenschaft natürlicher Zahlen
  $A(n_0)$ gilt (Induktionsverankerung)
  Für beliebiges n gilt: falls A(n) gilt, dann gilt auch A(n+k) (Induktionsschritt)
  dann gilt $\forall n \in N_0\ (A(n_0 + n*k))$
- Ist w ein Palindrom, dann kann es durch die obige Grammatik erzeugt werden.
  A(n) sei "jedes Palindrom der Länge n kann durch die Grammatik erzeugt werden"
  A(1) gilt
  Zu zeigen: $\forall n \in N\ (A(n) \Rightarrow A(n+2))$
  Sei w Palindrom der Länge n+2, dann muss es die Form ara oder brb haben, wobei r ein Palindrom der Länge n sein muss. Das kann aber laut Induktionsvoraussetzung A(n) erzeugt werden, also kann auch mit Hilfe der ersten beiden Grammatikregeln ein Palindrom der Länge n+2 erzeugt werden.
  Also kann jedes Palindrom der Länge ≥ 1 erzeugt werden.

Kellerautomaten

- Wird w durch die obige Grammatik erzeugt, dann ist es ein Palindrom.
  A(n) sei "jede Ableitung der Länge n oder kürzer enthält nur Palindrome"
  A(1) gilt
  Zu zeigen: $\forall n \in N\ (A(n) \Rightarrow A(n+1))$
  Sei $S \Rightarrow S_1 ... \Rightarrow S_n \Rightarrow S_{n+1}$ eine Ableitung der Länge n+1. Laut Induktionsvoraussetzung A(n) enthält die Ableitung der Länge n $S \Rightarrow S_1 ... \Rightarrow S_n$ nur Palindrome. Da auf S_n eine Grammatikregel anwendbar ist, muss es ein S enthalten. Dieses S muss in der Mitte stehen, da S_n ein Palindrom ist. Die Grammatikregeln ersetzen S durch aSa, bSb oder \$. D.h. S_{n+1} ist wieder ein Palindrom.
  D.h. jedes durch die Grammatik erzeugte Wort der Länge $n \geq 1$ ist ein Palindrom.

Kellerautomaten

- Kellerautomat M heisst deterministisch, wenn für alle $z \in Z$, $a \in A$ und $k \in K$ gilt $|t(z,a,k)| + |t(z,\varepsilon,k)| \leq 1$ und der Kellerautomat zustandsakzeptiert
- deterministische Kellerautomaten definieren die deterministisch kontextfreien Sprachen, eine echte Teilmenge der kontextfreien Sprachen
- Sprache $L=\{a_1...a_n\$a_n...a_1 \mid a_i \in A^*\}$ ist deterministisch kontextfrei
- Sprache $L=\{a_1...a_n a_n...a_1 \mid a_i \in A^*\}$ ist kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei
- deterministisch kontextfreie Sprachen werden auch LR(k) Sprachen genannt und spielen im Compilerbau eine grosse Rolle

Syntaxbäume

- einer Ableitung eines Wortes w in einer Typ 2 oder 3 Grammatik G kann ein Syntaxbaum (Ableitungsbaum) zugeordnet werden

  sei $w \in L(G)$ und $S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n = w$ eine Ableitung von w

  S bildet die Wurzel des Syntaxbaums

  falls im i-ten Ableitungsschritt $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ das Nichtterminal N durch ein Wort x ersetzt wird, dann erhält der Knoten N des Syntaxbaums $|x|$ Töchter, die mit den einzelnen Zeichen von x beschriftet werden

  Blätter des Baumes sind die Symbole von w

Beispiel

- Beispielgrammatik für ARIM

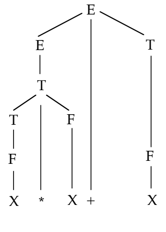
$E \rightarrow T$	(Expression ist Term)
$E \rightarrow E + T$	(Expression ist Expression + Term)
$T \rightarrow F$	(Term ist Faktor)
$T \rightarrow T*F$	(Term ist Term * Faktor)
$F \rightarrow X$	(Faktor ist Konstante oder Variable)
$F \rightarrow (E)$	(Faktor ist Expression in Klammern)

- Beispielableitungen

  $E \Rightarrow E + T \Rightarrow T + T \Rightarrow T*F + T \Rightarrow F*F + T \Rightarrow X*F + T \Rightarrow X*X + T \Rightarrow X*X + F \Rightarrow X*X + X$

  $E \Rightarrow E + T \Rightarrow E + F \Rightarrow E + X \Rightarrow T + X \Rightarrow T*F + X \Rightarrow T*X + X \Rightarrow F*X + X \Rightarrow X*X + X$

  haben den gleichen Syntaxbaum



  einmal links und einmal rechts abgeleitet

Syntaxbäume

- verschiedenen Ableitungen kann der gleiche Syntaxbaum zugeordnet werden, der dann verschieden traversiert wird
- es gilt: $w \in L(G)$ ⇔ es gibt eine Ableitung von w

  ⇔ es gibt einen Syntaxbaum mit w an den Blättern

  ⇔ es gibt eine Linksableitung von w

  ⇔ es gibt eine Rechtsableitung von w

Mehrdeutige Grammatiken

- eine Grammatik heisst mehrdeutig, wenn es für dasselbe Wort w verschieden strukturierte Syntaxbäume gibt; andernfalls heisst die Grammatik eindeutig

- Beispiel

  $S \rightarrow aB$

  $S \rightarrow Ac$

  $A \rightarrow ab$

  $B \rightarrow bc$

  für das Wort abc gibt es zwei verschiedene Ableitungen mit verschiedenen Syntaxbäumen

  $S \Rightarrow Ac \Rightarrow abc \qquad S \Rightarrow aB \Rightarrow abc$

  Mehrdeutigkeit kann in diesem Fall beseitigt werden, da eine eindeutige Grammatik existiert, die dieselbe Sprache generiert

  $S \rightarrow abc$

- Sprache L heisst inhärent mehrdeutig, wenn jede Grammatik G mit L = L(G) mehrdeutig ist

  Beispiel $L = \{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ oder } j=k\}$

(Extended) Backus Naur Form

- Backus und Naur entwickelten die Extended Backus Naur Form EBNF zur kompakten Darstellung von Typ 2 Grammatiken. (Eine einfachere Version ist als BNF bekannt.)

- Zusammenfassung von Regeln mit gleicher linker Seite

  $A \rightarrow R_1$

  $A \rightarrow R_2$

  ...

  $A \rightarrow R_n$

  zu

  $A \rightarrow R_1 \mid R_2 \mid \ldots \mid R_n$

- Zusammenfassung von Regeln mit optionalen Elementen (ein Wort O kann, aber muss nicht, auftauchen)

  $A \rightarrow R_1R_2$

  $A \rightarrow R_1OR_2$

  zu

  $A \rightarrow R_1[O]R_2$

(Extended) Backus Naur Form

- Zusammenfassung von Regeln mit wiederholten Elementen (ein Wort W kann beliebig oft, auch 0 Mal, auftauchen)

  $A \rightarrow R_1R_2$

  $A \rightarrow R_1W_RR_2$

  $W_R \rightarrow W$

  $W_R \rightarrow WW_R$

  zu

  $A \rightarrow R_1\{W\}R_2$

- (E)BNF und kontextfreie Grammatiken sind gleichwertig, d.h. durch (E)BNF werden genau die kontextfreien Sprachen dargestellt

Kontextsensitive Sprachen (Typ 1)

- kontextsensitive Sprachen werden durch kontextsensitive Grammatiken oder durch Kuroda Normalform Grammatiken beschrieben

- kontextsensitive Grammatik

  keine Regel ist verkürzend, d.h. für jede Regel

  $LHS \rightarrow RHS$ gilt $|LHS| \leq |RHS|$

  $RHS \neq \varepsilon$

- Kuroda Normalform

  jede Regel hat eine der vier Formen

  $N \rightarrow T \qquad N \rightarrow N \qquad N \rightarrow NN \qquad NN \rightarrow NN$

- kontextsensitive Sprachen sind unter Vereinigung, Durchschnitt, Konkatenation, Komplement und Sternbildung abgeschlossen

Rekursiv aufzählbare Sprachen (Typ 0)

- rekursiv aufzählbare Sprachen werden durch allgemeine, separierte oder normale Grammatiken beschrieben
- allgemeine Grammatik
  beliebige Regeln
- separierte Grammatik
  jede Regel hat eine der Formen
  $N \rightarrow T$
  $N \rightarrow \varepsilon$
  $N_1 N_2 \ldots N_n \rightarrow \varepsilon$
  $N_1 N_2 \ldots N_n \rightarrow N_{n+1} N_{n+2} \ldots N_{n+m}$
- normale Grammatik
  jede Regel hat eine der Formen
  Reduktionsregel: $N \rightarrow \varepsilon$
  Terminierungsregel: $N \rightarrow T$
  Expansionsregel: $N \rightarrow NN$
  Doppelsubstitution: $NN \rightarrow NN$

Turingmaschinen

- Turingmaschinen sind endliche Automaten mit einem beliebig grossen, sequentiell zugreifbaren Speicher
- Turings Vorstellung: endlicher Automat mit einem unendlichen Speicherband, das aus einzelnen Feldern besteht, und einem Lese- und Schreibkopf, der sich auf dem Band bewegen kann. Die Felder enthalten Buchstaben des Bandalphabets. Zeichen, die sich unter dem Kopf befinden, können gelesen und verändert werden. Der Kopf kann sich um ein Feld nach rechts oder links bewegen oder an der gleichen Stelle bleiben.
- Turingmaschine M wird formal durch ein 7-Tupel beschrieben $M=(Z, A, B, t, z_0, \#, E)$

Z	endliche Menge von Zuständen
A	endliches Eingabealphabet
B	endliches Bandalphabet, $A \subseteq B$
$z_0 \in Z$	Anfangszustand
$\# \in B-A$	Leerzeichen
$E \subseteq Z$	endliche Menge von Endzuständen
t	Zustandsübergangsfunktion $Z \times B \rightarrow P(Z \times B \times (L, R, N))$ L=Bewegung nach links, R=Bewegung nach rechts, N=keine Bewegung

Turingmaschinen

- Befindet sich M im Zustand z und ist unter dem Kopf der Buchstabe a, dann geht M im nächsten Schritt in einen Zustand z' über, schreibt anstelle von a einen Buchstaben b auf das Band und führt dann eine Bewegung $x \in (L, R, N)$ aus, formal
  $t(z,a)$ ist ein Element der Menge (z',b,x)
- Konfiguration der Turingmaschine ist $k \in B^* \times Z \times B^*$
  $k=b_1 z b_2$
  b_1 schon besuchter Teil des Bandes
  z aktueller Zustand
  b_2 Rest des Bandes, Kopf steht auf erstem Zeichen von b_2
- Anfangskonfiguration z_0x: auf dem Band steht die Eingabe $x \in A$ und die Turingmaschine ist im Zustand z_0
- später: Konfiguration $a_1 \ldots a_m z b_1 \ldots b_n$
  Übergang ohne Bewegung des Kopfes:
  $t(z,b_1)= (z',c,N)$, neue Konfiguration $a_1 \ldots a_m z' c b_2 \ldots b_n$
  Übergang mit Bewegung nach rechts:
  $t(z,b_1)= (z',c,R)$, neue Konfiguration $a_1 \ldots a_m c z' b_2 \ldots b_n$
  Übergang mit Bewegung nach links:
  $t(z,b_1)=(z',c,L)$, neue Konfiguration $a_1 \ldots a_{m-1} z' a_m c b_2 \ldots b_n$

Turingmaschinen

- Spezialfälle
  n=1 und Übergang mit Bewegung nach rechts:
  $t(z,b_1)= (z',c,R)$, neue Konfiguration $a_1 \ldots a_m c z' \#$
  m=0 und Übergang mit Bewegung nach links:
  $t(z,b_1)=(z',c,L)$, neue Konfiguration $z' \# c b_2 \ldots b_n$
- Beispiel
  $M=(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0,1\}, \{0, 1, \#\}, t, z_0, \#, \{z_3\})$
  $t(z_0, 0) = (z_0, 0, R)$
  $t(z_0, 1) = (z_0, 1, R)$
  $t(z_0, \#) = (z_1, \#, L)$
  $t(z_1, 0) = (z_2, 1, L)$
  $t(z_1, 1) = (z_1, 0, L)$
  $t(z_1, \#) = (z_3, 1, N)$
  $t(z_2, 0) = (z_2, 0, L)$
  $t(z_2, 1) = (z_2, 1, L)$
  $t(z_2, \#) = (z_3, \#, R)$
  Startet M mit 101 auf dem Band, dann hält sie mit 110 auf dem Band und dem Kopf auf dem ersten Zeichen
  $z_0 101 \Rightarrow 1 z_0 01 \Rightarrow 10 z_0 1 \Rightarrow 101 z_0 \# \Rightarrow 10 z_1 1 \# \Rightarrow 1 z_1 00\# \Rightarrow z_2 110\# \Rightarrow z_2 \# 110\# \Rightarrow \# z_3 110\#$
- Berechnung
  Die Turingmaschine interpretiert die Eingabe $x \in \{0,1\}$ als binäre Zahl und addiert eine 1 zur Eingabe.

Turingmaschinen

- Anwendung der Zustandsübergangsfunktion t bewirkt einen Übergang von Konfiguration k zu Konfiguration k', ausgedrückt als Relation $k \Rightarrow k'$. Sei $\Rightarrow^*$ die reflexive und transitive Hülle von $\Rightarrow$.
- Turingmaschine M akzeptiert Sprache

  $L(M) = \{x \in A^* \mid z_0 x \Rightarrow^* b_1 z b_2$ für $b_1, b_2 \in B$ und $z \in E\}$
- Die durch nichtdeterministische Turingmaschinen akzeptierten Sprachen sind genau die rekursiv aufzählbaren Sprachen (Typ 0).

Linear beschränkte Turingmaschinen

- Linear beschränkte Turingmaschinen verlassen nie den Teil des Bandes, auf dem die Eingabe steht.
- Eine nichtdeterministische Turingmaschine heisst linear beschränkt, wenn für alle $a_1 \ldots a_{n-1} a_n \in A^*$, die rechts durch ein Kontrollzeichen c begrenzt sind und alle Konfigurationen $b_1 z b_2$ mit $z_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n c \Rightarrow^* b_1 z b_2$ gilt $|b_1 b_2| = n$.
- Linear beschränkte Turingmaschine M akzeptiert Sprache

  $L(M) = \{a_1 \ldots a_{n-1} a_n \in A^* \mid z_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n c \Rightarrow^* b_1 z b_2$ für $b_1, b_2 \in B$ und $z \in E\}$
- Die durch linear beschränkte, nichtdeterministische Turingmaschinen akzeptierten Sprachen sind genau die kontextsensitiven Sprachen (Typ 1).