Prädikatenlogik

- Aussagen wie

  Die Sonne scheint.

  die in der Aussagenlogik atomar sind, werden in der Prädikatenlogik in Terme (*sonne*) und Prädikate (*scheint*) aufgelöst und dann dargestellt als z.B.

  scheint(sonne)

- Terme

  Namen von Objekten des Diskursbereichs

  (z. B. Substantive des natürlichsprachlichen Satzes)

- Prädikate

  Namen von Eigenschaften, Relationen, Klassen

  (z. B. Verben, Adjektive des natürlichsprachlichen Satzes)

- Prädikatenlogik führt Variablen ein, die für (noch) nicht bekannte Objekte des Diskursbereichs stehen

  scheint(X)

  Diese Variablen ähneln den aus der Mathematik bekannten. Sie sind nicht zu verwechseln mit Variablen in prozeduralen Programmiersprachen, die für Speicherstellen stehen.

Quantoren

- Quantoren erlauben Aussagen über Mengen von Objekten des Diskursbereichs, für die ein Prädikat gilt
- universelle Quantifizierung macht eine Aussage über alle Objekte des Diskursbereichs

  Alle Menschen sind sterblich.

  $\forall X\ (\text{mensch}(X) \rightarrow \text{sterblich}(X))$

- existentielle Quantifizierung macht eine Aussage über mindestens ein Objekt des Diskursbereichs

  Es gibt sterbliche Menschen.

  $\exists X\ (\text{mensch}(X) \wedge \text{sterblich}(X))$

Quantoren

- Skopus

  In den Ausdrücken $\forall X$ (P) oder $\exists X$ (P) heisst P der *Skopus* (Gültigkeitsbereich) der Variablen X.

  Eine Variable im Skopus eines Quantors heisst *gebunden*.

  Eine nicht gebundene Variable heisst *frei*.

  Ein Ausdruck ohne freie Variable heisst *geschlossen*.

- Beispiel

  $\exists X\ (\text{gerade}(X)) \lor \text{null}(X)$

  Erstes Vorkommen von X ist gebunden, zweites frei.

  (Besser: Variablen eindeutig benennen.)

- Beispiel

  $\forall X\ (\text{mensch}(X) \rightarrow \exists Y\ (\text{mensch}(Y) \land \text{liebt}(X,Y)\ )\ )$

  --------------------- Skopus X ---------------------

  ---------- Skopus Y -------

  Ausdruck ist geschlossen

Quantoren

- geschachtelte universelle Quantoren können vertauscht werden

  $\forall X\ (\forall Y\ (p(X,Y))) \equiv \forall Y\ (\forall X\ (p(X,Y)))$

- genauso geschachtelte existentielle Quantoren

  $\exists X\ (\exists Y\ (p(X,Y))) \equiv \exists Y\ (\exists X\ (p(X,Y)))$

- universelle und existentielle Quantoren dürfen im allgemeinen nicht vertauscht werden

  Alle Menschen lieben einen Menschen.

  $\forall X\ \ (mensch(X) \rightarrow \exists Y\ (mensch(Y) \wedge liebt(X,Y)))$

  Bedeutung: *Für jeden Menschen gibt es einen – nicht notwendigerweise denselben – Menschen, den er liebt.*

  $\exists X\ (mensch(X) \wedge \forall Y\ (mensch(Y) \rightarrow liebt(Y,X)))$

  Bedeutung: *Es gibt (mindestens) einen Menschen, der von allen Menschen geliebt wird.*

  Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine grössere.

  $\forall X\ (n(X) \rightarrow \exists Y\ (n(Y) \wedge Y > X))$

  Es gibt eine natürliche Zahl, die grösser ist als alle anderen.

  $\exists Y\ (n(Y) \wedge \forall X\ (n(X) \rightarrow Y > X))$

  Die erste Aussage ist wahr, die zweite falsch.

Umformungen quantifizierter Ausdrücke

- Negation von Quantoren

  $\neg (\forall X (p(X))) \equiv \exists X (\neg (p(X)))$

  $\neg (\exists X (p(X))) \equiv \forall X (\neg (p(X)))$

- Skopusveränderungen (X taucht in P auf, nicht in Q)

  $\forall X (P) \wedge Q \equiv \forall X (P \wedge Q)$

  $\forall X (P) \vee Q \equiv \forall X (P \vee Q)$

  $\exists X (P) \wedge Q \equiv \exists X (P \wedge Q)$

  $\exists X (P) \vee Q \equiv \exists X (P \vee Q)$

  $\forall X (P) \rightarrow Q \equiv \exists X (P \rightarrow Q)$

  $\exists X (P) \rightarrow Q \equiv \forall X (P \rightarrow Q)$

  $Q \rightarrow \forall X (P) \equiv \forall X (Q \rightarrow P)$

  $Q \rightarrow \exists X (P) \equiv \exists X (Q \rightarrow P)$

- Name der quantifizierten Variablen ist belanglos

  $\forall X (p(X)) \equiv \forall Z23 (p(Z23))$

  $\exists Y (p(Y)) \equiv \exists XYZ (p(XYZ))$

Syntax der Prädikatenlogik

- zwei Alphabete

  logische Zeichen

  Theoriezeichen (abhängig vom Diskursbereich)

- logische Zeichen

  Menge von Variablen: X, X23, ...

  Konnektoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$

  logisches Atom: $\perp$

  Quantoren: $\forall$, $\exists$

  Trennzeichen: "," "(" ")"

- Theoriezeichen

  Menge von Konstanten

  Menge von Funktionszeichen mit Arität (f / N)

  Menge von Relationszeichen mit Arität (p / N)

Syntax der Prädikatenlogik

- Sprache der Prädikatenlogik besteht aus Termen und wohlgeformten Ausdrücken (Formeln)

- Terme

  Jede Variable ist ein Term.

  X

  (Variablen stehen für (noch) nicht bekannte Objekte des Diskursbereiches.)

  Jede Konstante ist ein Term.

  a, sokrates

  (Konstante stehen für bekannte Objekte des Diskursbereiches.)

  Wenn t_1, ..., t_n Terme sind und f ein n-stelliges Funktionszeichen – meistens geschrieben als f/n – dann ist f(t_1, ..., t_n) ein zusammengesetzter Term.

  vater_von(sokrates)

  vater_von(vater_von(sokrates))

  (Zusammengesetzte Terme stehen für aus anderen Objekten "konstruierte" Objekte des Diskursbereiches.)

  Es gibt keine weiteren Terme.

Syntax der Prädikatenlogik

- (wohlgeformte) Ausdrücke

  $\perp$ ist ein atomarer Ausdruck.

  Wenn $t_1, ..., t_n$ Terme sind und p ein n-stelliges Relationszeichen – meistens geschrieben als p/n – dann ist $p(t_1, ..., t_n)$ ein atomarer Ausdruck.

  rot(X)

  liebt(anton, maria)

  (Relationszeichen werden auch Prädikate genannt.)

  Wenn P und Q Ausdrücke sind, dann auch

  $(\neg P)$ $(P \land Q)$ $(P \lor Q)$ $(P \rightarrow Q)$

  (P und Q stehen für irgendwelche Ausdrücke)

  Ist P ein Ausdruck und X eine Variable, dann sind auch

  $\forall X\ (P)$ $\exists\ X\ (P)$

  Ausdrücke.

  Es gibt keine weiteren Ausdrücke.

Bemerkungen zur Syntax

- Syntax der Prädikatenlogik ist nicht standardisiert: jedes Textbuch verwendet eine (leicht) andere Notation
- Meine Notation:

  Klammern geben jeweils den Skopus an

  $\neg\,(P) \qquad \forall X\,(P)$

  oder fassen zusammengehörende Ausdrücke zusammen

  $\neg\,(P \land Q)$

- Klammern sollten immer gesetzt werden, wenn der Ausdruck sonst unklar ist
- Klammern können weggelassen werden, wenn der Ausdruck eindeutig ist, z.B.

  $\neg\,(\forall X\,(P)) \equiv \neg\,\forall X\,(P)$

  $\forall X\,(p(X)) \equiv \forall X\; p(X)$

  $\neg\,(p(X)) \equiv \neg\; p(X)$

Beispiel: Peano Arithmetik

- Theoriezeichen

  Konstante:

  0

  Funktionszeichen:

  s/1 (= Nachfolgerfunktion)

  +/2 (= Addition)

  */2 (= Multiplikation)

  Relationszeichen:

  =/2 (= Gleichheitsrelation)

- Beispiele

  Terme:

  0 s(0) s(s(0))

  +(X, s(0)) (Präfixnotation)

  ≡ X + s(0) (Infixnotation)

  *(s(s(0)), X) (Präfixnotation)

  ≡ s(s(0)) * X (Infixnotation)

  Ausdrücke:

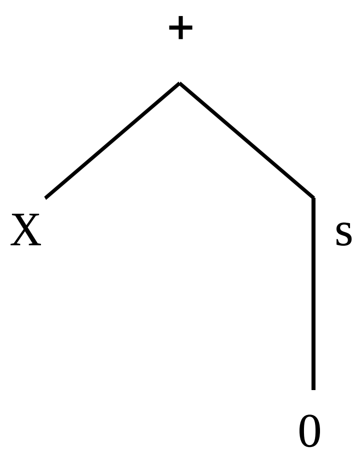
  =(X + s(Y), s(X + Y)) (Präfixnotation)

  ≡ X + s(Y) = s(X + Y) (Infixnotation)

Baumstruktur

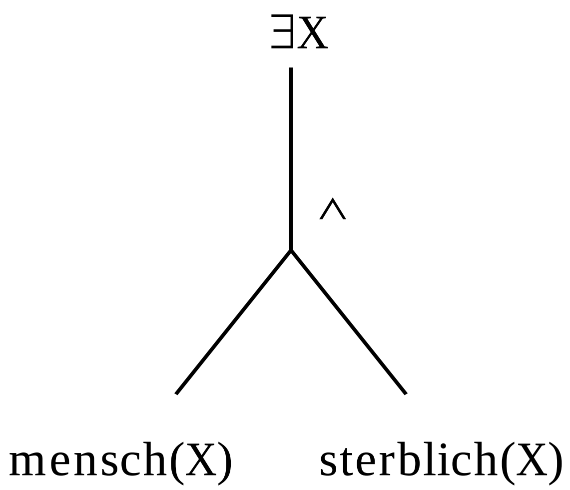
- Terme haben eine Baumstruktur, z.B.

  +(X, s(0))



- Formeln haben eine Baumstruktur, z.B.

  ∃X (mensch(X) ∧ sterblich(X))



Substitutionen

- Substitutionen

  Ersetzen einer Variablen in einem Ausdruck durch einen Term.

  Seien X eine Variable, T ein Term und P ein Ausdruck.

  $(P)\{X/T\}$ ist der Ausdruck, den man erhält, wenn man jedes freie Auftreten von X in P durch T ersetzt.

  $(P)\{X/T\}$ wird *Instanz* von P genannt.

- Beispiele

  $(\forall X\ (\text{gerade}(X)) \vee \text{null}(X))\ \{X/0\}$

  $\equiv \forall X\ (\text{gerade}(X)) \vee \text{null}(0)$

  $(\text{vater}(X))\ \{X/\text{vater}(\text{anton})\}$

  $\equiv \text{vater}(\text{vater}(\text{anton}))$

Normalformen

- prädikatenlogische Ausdrücke können in äquivalente Ausdrücke umgeformt werden

- Beispiel

$$\forall X\ (\text{mensch}(X) \rightarrow \text{sterblich}(X))$$

$$\equiv$$

$$\forall X\ (\neg\ \text{mensch}(X) \vee \text{sterblich}(X))$$

$$\equiv$$

$$\forall X\ (\neg\ (\text{mensch}(X) \wedge \neg\ \text{sterblich}(X)))$$

$$\equiv$$

$$\neg\ \exists\ X\ (\text{mensch}(X) \wedge \neg\ \text{sterblich}(X)))$$

- gesucht: Normalformen für prädikatenlogische Ausdrücke

Normalformen: Pränexform

- Pränexform

  Ein prädikatenlogischer Ausdruck ist in Pränexform, wenn er die Form

  $Q_1X_1 (Q_2X_2 .... (Q_nX_n (A) ...))$

  hat, wobei Q_i Quantoren sind, X_i Variable und A keine Quantoren enthält.

- Beispiel

  $\neg \forall X (p(X,Y)) \wedge q(U) \wedge \neg (\forall Z (r(Z)) \vee s(W))$

  $\equiv$ [Regel: $\neg \forall X (p(X)) \equiv \exists X (\neg p(X))$]

  [Regel: $\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$]

  $\exists X (\neg p(X,Y)) \wedge q(U) \wedge \neg \forall Z (r(Z)) \wedge \neg s(W)$

  $\equiv$ [Regel: $\neg (\forall X (p(X))) \equiv \exists X (\neg p(X))$]

  $\exists X (\neg p(X,Y)) \wedge q(U) \wedge \exists Z (\neg r(Z)) \wedge \neg s(W)$

  $\equiv$ [Regel: $(\exists X P) \wedge Q \equiv \exists X (P \wedge Q)$]

  [Regel: Assoziativität von $\wedge$]

  $\exists X \exists Z (\neg p(X,Y) \wedge q(U) \wedge \neg r(Z) \wedge \neg s(W))$

- Zu jeder prädikatenlogischen Formel gibt es (mindestens) eine logisch äquivalente Pränexform.

Anwendung: Analyse natürlichsprachlicher Sätze

- natürlichsprachliche Sätze können auch in Prädikatenlogik übersetzt werden
- Beispiel 1

  Jeder im Raum spricht Französisch oder Deutsch.

  Umformulierung in halbformale Darstellung

  Für alle X gilt, wenn X eine Person im Raum ist, dann spricht X Französisch oder spricht X Deutsch.

  Einführung von Prädikaten

  r/1 "ist eine Person im Raum"

  f/1 "spricht Französisch"

  d/1 "spricht Deutsch"

  prädikatenlogische Formel

  $\forall X\, (r(X) \rightarrow (f(X) \vee d(X)))$

Anwendung: Analyse natürlichsprachlicher Sätze

- Beispiel 2

  Einige Personen sagen einige Zeit die Wahrheit, andere lügen nie.

  Umformulierung

  Es gibt eine Person P1 und es gibt einen Zeitpunkt T1, an dem P1 die Wahrheit sagt. Es gibt eine Person P2, die verschieden von P1 ist und zu allen Zeitpunkten T2 nicht lügt.

  Einführung von Prädikaten

  p / 1 "ist eine Person "

  z / 1 "ist ein Zeitpunkt"

  w / 2 "sagt die Wahrheit zu einem Zeitpunkt"

  l/2 "lügt zu einem Zeitpunkt"

  v / 2 "sind verschieden"

  prädikatenlogische Formel

  $$\exists P1\ (\exists T1\ (p(P1) \land z(T1) \land w(P1,T1))$$
  $$\land$$
  $$\exists P2\ (p(P2) \land v(P1,P2) \land \forall T2\ (z(T2) \rightarrow \neg\ l(P2,T2))))$$

  Die Information, dass sich w / 2 und l/2 gegenseitig ausschliessen, ist nicht explizit bekannt, und kann deshalb nicht zur Vereinfachung verwendet werden.

Semantik der Prädikatenlogik

- Wann sind Ausdrücke der Prädikatenlogik wie

  p(a, X)

  wahr?

- Idee: Ausdrücke der Prädikatenlogik werden als wahr bezeichnet, wenn sie einen wahren Sachverhalt im Diskursbereich beschreiben

- Formal: Ausdrücke erhalten ihren Wahrheitswert durch eine Interpretation I und eine Variablenbelegung V in einem Diskursbereich D

  (Alternativ wird das Tupel <D,I> als Interpretation bezeichnet. Oft nimmt man jedoch D als gegeben an und diskutiert nur I.)

- Interpretation I

Konstante c	$I(c) \in D$
Funktionszeichen f mit Arität n	$I(f): D^n \rightarrow D$
Relationszeichen r mit Arität n	$I(r) \subseteq D^n$

- Variablenbelegung V

Variable X	$V(X) \in D$

Semantik der Prädikatenlogik

- Interpretation I und Variablenbelegung V definieren zusammen die Abbildung I•V(t) eines beliebigen Terms t auf Objekte des Diskursbereichs

Konstante c	$I \bullet V(c) = I(c) \in D$
Variable X	$I \bullet V(X) = V(X) \in D$
$f(t_1, ..., t_n)$	$I \bullet V(f(t_1, ..., t_n))$
	$= I(f)(I \bullet V(t_1),...,I \bullet V(t_n)) \in D$

- Man beachte, dass die verwendeten Symbole – I, V, I•V, c, t, … – nicht Elemente der Sprache der Prädikatenlogik, sondern Elemente einer Metasprache sind, in der wir über die Sprache der Prädikatenlogik sprechen.

Semantik der Prädikatenlogik

- Beispiel

  Term p(X, q(a))

  D sei die Menge der Peano Zahlen mit den Funktionen s / 1 und + / 2

  Wir wählen

  I(a) = s(0)

  I(p / 2) = + / 2

  I(q / 1) = s / 1

  V(X) = s(s(s(0)))

  Damit gilt

  I • V(p(X, q(a)))

  = I(p)(V(X), I(q)(I(a)))

  = +(s(s(s(0))), s(s(0)))

  = s(s(s(s(s(0))))) ∈ D

Semantik der Prädikatenlogik

- Wahrheitswerte prädikatenlogischer Ausdrücke

  Gegeben ein Diskursbereich D kann jedem prädikatenlogischen Ausdruck P unter der Interpretation I und der Variablenbelegung V ein Wahrheitswert aus {W, F} zugeordnet werden.

  Da der Wahrheitswert von P im allgemeinen von I und V abhängt, führt man den Begriff der Erfüllbarkeit als relative Wahrheit ein.

  $\models_I P\ [V]$ bedeutet, dass P von der Interpretation I und der Variablenbelegung V erfüllt wird, d.h. bezüglich I und V wahr ist.

  $\not\models_I P\ [V]$ bedeutet, dass P von der Interpretation I und der Variablenbelegung V nicht erfüllt wird.

- atomare Ausdrücke

  Ausdruck ist $r(t_1, ..., t_n)$ mit dem Relationszeichen r/n und den Termen $t_1, ..., t_n$.

  $\models_I r(t_1, ..., t_n)\ [V]$ genau dann, wenn das Tupel

  $< I \bullet V(t_1), ..., I \bullet V(t_n) > \in I(r)$

- Spezialfall

  Der atomare Ausdruck $\perp$ ist durch keine Interpretation und keine Variablenbelegung erfüllbar, d.h. $\perp$ hat immer den Wahrheitswert F.

Semantik der Prädikatenlogik

- Ausdrücke mit Konnektoren

  $\models_I (\neg P)\ [V]$ genau dann, wenn $\not\models_I P\ [V]$

  $\models_I (P \wedge Q)\ [V]$ gdw. $\models_I P\ [V]$ und $\models_I Q\ [V]$

  $\models_I (P \vee Q)\ [V]$ gdw. $\models_I P\ [V]$ oder $\models_I Q\ [V]$

  $\models_I (P \rightarrow Q)\ [V]$ gdw. $\not\models_I P\ [V]$ oder $\models_I Q\ [V]$

  Diese Definitionen entsprechen den Wahrheitstabellen der Aussagenlogik.

- universell quantifizierte Ausdrücke

  Informell: $\forall X\ (P)$ wird genau dann erfüllt, wenn P für alle Belegungen der Variablen X erfüllt wird.

  Formal: $\models_I (\forall X\ P)\ [V]$ genau dann, wenn $\models_I P\ [W]$ für alle $d \in D$, wobei $W(X) = d$ und $W(Y) = V(Y)$ für alle $Y \neq X$.

- existentiell quantifizierte Ausdrücke

  Informell: $\exists X\ (P)$ wird genau dann erfüllt, wenn P für mindestens eine Belegung der Variablen X erfüllt wird.

  Formal: $\models_I (\exists X\ P)\ [V]$ genau dann, wenn $\models_I P\ [W]$ für mindestens ein $d \in D$, wobei $W(X) = d$ und $W(Y) = V(Y)$ für alle $Y \neq X$.

Semantik der Prädikatenlogik

- Beispiel

  Ausdruck even(p(X, q(a)))

  D sei die Menge der Peano Zahlen mit den Funktionen s / 1 und + / 2

  Wir wählen

  I(a) = s(0)

  I(p / 2) = + / 2

  I(q / 1) = s / 1

  V(X) = s(s(s(0)))

  I(even) = {0, s(s(0)), s(s(s(s(0)))), ...} $\subseteq$ D

  p(X, q(a)) --> +(s(s(s(0))), s(s(0))) = s(s(s(s(s(0))))) $\in$ D

  Damit gilt

  $\not\models_I$ even(p(X, q(a)))) [V]

  denn s(s(s(s(s(0))))) $\notin$ I(even)

Modelle

- Modelle

  D sei ein Wertebereich, I eine Interpretation

  Ein Ausdruck P wird in der Interpretation I wahr genannt und I heisst ein Modell dieses Ausdrucks, wenn P für alle Variablenbelegungen wahr ist.

  Ist ein geschlossener Ausdruck für eine Variablenbelegung wahr, dann gilt das für alle Variablenbelegungen.

- Es kann mehr als ein Modell geben.

- Eine Interpretation I, die eine Menge von Ausdrücken M für alle Variablenzuordnungen wahr macht, heisst ein Modell von M.

- Menge von prädikatenlogischen Ausdrücken heisst

  erfüllbar, wenn sie mindestens ein Modell hat

  widerlegbar, wenn es mindestens eine Interpretation gibt, die kein Modell ist

  tautologisch oder gültig, wenn jede Interpretation ein Modell ist

  inkonsistent, wenn sie kein Modell hat

Modelle: Beispiel

- gegeben sei die Menge von Ausdrücken

  $\{p(a), \forall X\ (p(X) \rightarrow q(X))\}$

- Modell 1

  $I_1(a)$ = Sokrates

  $I_1(p)$ = menschlich: {Sokrates, Platon, Meier, ...}

  $I_1(q)$ = sterblich: {Sokrates, Platon, Meier, ...}

- Modell 2

  $I_2(a) = 8$

  $I_2(p)$ = durch_4_teilbar: {0, 4, 8, ...}

  $I_2(q)$ = gerade: {0, 2, 4, ...}

- es gibt unendlich viele Modelle
- man interessiert sich jedoch meistens nur für das *intendierte* Modell und wählt die Namen von Konstanten, Funktionen und Prädikaten entsprechend

  {menschlich(sokrates), $\forall$X (menschlich(X) $\rightarrow$sterblich(X))}

- Wahl der Namen erhöht nur die Lesbarkeit; Namen sind jedoch beliebig; es gibt nach wie vor unendlich viele Modelle
- Schluss: logische Aussagen legen den Diskursbereich nicht eindeutig fest

Folgerungsrelation

- Folgerungsrelation, logische Konsequenz

  M und N sind Mengen prädikatenlogischer Ausdrücke

  Es gilt die logische Konsequenz $M \models N$, wenn **jedes** Modell der Menge M auch ein Modell der Menge N ist, d.h.

- Beispiel

  $\{p(a), \forall X\ (p(X) \rightarrow q(X))\} \models q(a)$

  wenn **jedes** Modell der linken Seite auch Modell der rechten Seite ist

  Problem: es gibt unendlich viele Modelle

- Lösung des Problems durch logische Deduktion