

Prädikatenlogik

- Aussagen wie

Die Sonne scheint.

die in der Aussagenlogik atomar sind, werden in der Prädikatenlogik in Terme (*sonne*) und Prädikate (*scheint*) aufgelöst und dann dargestellt als z.B.

scheint(sonne)

- Terme

Namen von Objekten des Diskursbereichs

(z. B. Substantive des natürlichsprachlichen Satzes)

- Prädikate

Namen von Eigenschaften, Relationen, Klassen

(z. B. Verben, Adjektive des natürlichsprachlichen Satzes)

- Prädikatenlogik führt Variablen ein, die für (noch) nicht bekannte Objekte des Diskursbereichs stehen

scheint(X)

Diese Variablen ähneln den aus der Mathematik bekannten. Sie sind nicht zu verwechseln mit Variablen in prozeduralen Programmiersprachen, die für Speicherstellen stehen.

Quantoren

- Skopus

In den Ausdrücken $\forall X (P)$ oder $\exists X (P)$ heisst P der *Skopus* (Gültigkeitsbereich) der Variablen X.

Eine Variable im Skopus eines Quantors heisst *gebunden*.

Eine nicht gebundene Variable heisst *frei*.

Ein Ausdruck ohne freie Variable heisst *geschlossen*.

- Beispiel

$\exists X (\text{gerade}(X)) \vee \text{null}(X)$

Erstes Vorkommen von X ist gebunden, zweites frei.

(Besser: Variablen eindeutig benennen.)

- Beispiel

$\forall X (\text{mensch}(X) \rightarrow \exists Y (\text{mensch}(Y) \wedge \text{liebt}(X,Y)))$

----- Skopus X -----

----- Skopus Y -----

Ausdruck ist geschlossen

Quantoren

- Quantoren erlauben Aussagen über Mengen von Objekten des Diskursbereichs, für die ein Prädikat gilt

- universelle Quantifizierung macht eine Aussage über alle Objekte des Diskursbereichs

Alle Menschen sind sterblich.

$\forall X (\text{mensch}(X) \rightarrow \text{sterblich}(X))$

- existentielle Quantifizierung macht eine Aussage über mindestens ein Objekt des Diskursbereichs

Es gibt sterbliche Menschen.

$\exists X (\text{mensch}(X) \wedge \text{sterblich}(X))$

Quantoren

- geschachtelte universelle Quantoren können vertauscht werden

$\forall X (\forall Y (p(X,Y))) \equiv \forall Y (\forall X (p(X,Y)))$

- genauso geschachtelte existentielle Quantoren

$\exists X (\exists Y (p(X,Y))) \equiv \exists Y (\exists X (p(X,Y)))$

- universelle und existentielle Quantoren dürfen im allgemeinen nicht vertauscht werden

Alle Menschen lieben einen Menschen.

$\forall X (\text{mensch}(X) \rightarrow \exists Y (\text{mensch}(Y) \wedge \text{liebt}(X,Y)))$

Bedeutung: *Für jeden Menschen gibt es einen – nicht notwendigerweise denselben – Menschen, den er liebt.*

$\exists X (\text{mensch}(X) \wedge \forall Y (\text{mensch}(Y) \rightarrow \text{liebt}(Y,X)))$

Bedeutung: *Es gibt (mindestens) einen Menschen, der von allen Menschen geliebt wird.*

Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine grössere.

$\forall X (n(X) \rightarrow \exists Y (n(Y) \wedge Y > X))$

Es gibt eine natürliche Zahl, die grösser ist als alle anderen.

$\exists Y (n(Y) \wedge \forall X (n(X) \rightarrow Y > X))$

Die erste Aussage ist wahr, die zweite falsch.

Umformungen quantifizierter Ausdrücke

- Negation von Quantoren
 - $\neg (\forall X (p(X))) \equiv \exists X (\neg (p(X)))$
 - $\neg (\exists X (p(X))) \equiv \forall X (\neg (p(X)))$
- Skopusveränderungen (X taucht in P auf, nicht in Q)
 - $\forall X (P) \wedge Q \equiv \forall X (P \wedge Q)$
 - $\forall X (P) \vee Q \equiv \forall X (P \vee Q)$
 - $\exists X (P) \wedge Q \equiv \exists X (P \wedge Q)$
 - $\exists X (P) \vee Q \equiv \exists X (P \vee Q)$
 - $\forall X (P) \rightarrow Q \equiv \exists X (P \rightarrow Q)$
 - $\exists X (P) \rightarrow Q \equiv \forall X (P \rightarrow Q)$
 - $Q \rightarrow \forall X (P) \equiv \forall X (Q \rightarrow P)$
 - $Q \rightarrow \exists X (P) \equiv \exists X (Q \rightarrow P)$
- Name der quantifizierten Variablen ist belanglos
 - $\forall X (p(X)) \equiv \forall Z23 (p(Z23))$
 - $\exists Y (p(Y)) \equiv \exists XYZ (p(XYZ))$

Prädikatenlogik 5

Syntax der Prädikatenlogik

- Sprache der Prädikatenlogik besteht aus Termen und wohlgeformten Ausdrücken (Formeln)
- Terme
 - Jede Variable ist ein Term.
 - X
 - (Variablen stehen für (noch) nicht bekannte Objekte des Diskursbereiches.)
 - Jede Konstante ist ein Term.
 - a, sokrates
 - (Konstante stehen für bekannte Objekte des Diskursbereiches.)
 - Wenn t_1, \dots, t_n Terme sind und f ein n-stelliges Funktionszeichen – meistens geschrieben als f/n – dann ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein zusammengesetzter Term.
 - vater_von(sokrates)
 - vater_von(vater_von(sokrates))
 - (Zusammengesetzte Terme stehen für aus anderen Objekten "konstruierte" Objekte des Diskursbereiches.)
- Es gibt keine weiteren Terme.

Prädikatenlogik 7

Syntax der Prädikatenlogik

- zwei Alphabete
 - logische Zeichen
 - Theoriezeichen (abhängig vom Diskursbereich)
- logische Zeichen
 - Menge von Variablen: X, X23, ...
 - Konnektoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
 - logisches Atom: \perp
 - Quantoren: \forall, \exists
 - Trennzeichen: ", " (" " ")
- Theoriezeichen
 - Menge von Konstanten
 - Menge von Funktionszeichen mit Arität (f/N)
 - Menge von Relationszeichen mit Arität (p/N)

Prädikatenlogik 6

Syntax der Prädikatenlogik

- (wohlgeformte) Ausdrücke
 - \perp ist ein atomarer Ausdruck.
 - Wenn t_1, \dots, t_n Terme sind und p ein n-stelliges Relationszeichen – meistens geschrieben als p/n – dann ist $p(t_1, \dots, t_n)$ ein atomarer Ausdruck.
 - rot(X)
 - liebt(anton, maria)
 - (Relationszeichen werden auch Prädikate genannt.)
 - Wenn P und Q Ausdrücke sind, dann auch
 - $(\neg P)$ $(P \wedge Q)$ $(P \vee Q)$ $(P \rightarrow Q)$
 - (P und Q stehen für irgendwelche Ausdrücke)
 - Ist P ein Ausdruck und X eine Variable, dann sind auch
 - $\forall X (P)$ $\exists X (P)$
 - Ausdrücke.
 - Es gibt keine weiteren Ausdrücke.

Prädikatenlogik 8

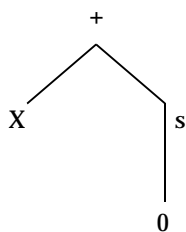
Bemerkungen zur Syntax

- Syntax der Prädikatenlogik ist nicht standardisiert: jedes Textbuch verwendet eine (leicht) andere Notation
- Meine Notation:
 - Klammern geben jeweils den Skopus an
 - $\neg (P) \quad \forall X (P)$
 - oder fassen zusammengehörende Ausdrücke zusammen
 - $\neg (P \wedge Q)$
- Klammern sollten immer gesetzt werden, wenn der Ausdruck sonst unklar ist
- Klammern können weggelassen werden, wenn der Ausdruck eindeutig ist, z.B.
 - $\neg (\forall X (P)) \equiv \neg \forall X (P)$
 - $\forall X (p(X)) \equiv \forall X p(X)$
 - $\neg (p(X)) \equiv \neg p(X)$

Baumstruktur

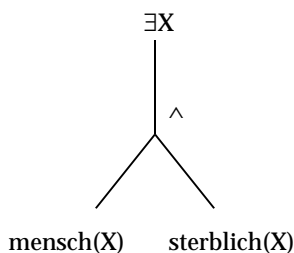
- Terme haben eine Baumstruktur, z.B.

$$+(X, s(0))$$



- Formeln haben eine Baumstruktur, z.B.

$$\exists X (\text{mensch}(X) \wedge \text{sterblich}(X))$$



Beispiel: Peano Arithmetik

- Theoriezeichen

Konstante:

0

Funktionszeichen:

$s/1$ (= Nachfolgerfunktion)

$+/2$ (= Addition)

$*/2$ (= Multiplikation)

Relationszeichen:

$=/2$ (= Gleichheitsrelation)

- Beispiele

Terme:

0 $s(0)$ $s(s(0))$

$+(X, s(0))$ (Präfixnotation)

$\equiv X + s(0)$ (Infixnotation)

$*(s(s(0)), X)$ (Präfixnotation)

$\equiv s(s(0)) * X$ (Infixnotation)

Ausdrücke:

$\equiv (X + s(Y), s(X + Y))$ (Präfixnotation)

$\equiv X + s(Y) = s(X + Y)$ (Infixnotation)

Substitutionen

- Substitutionen

Ersetzen einer Variablen in einem Ausdruck durch einen Term.

Seien X eine Variable, T ein Term und P ein Ausdruck.

$(P)\{X/T\}$ ist der Ausdruck, den man erhält, wenn man jedes freie Auftreten von X in P durch T ersetzt.

$(P)\{X/T\}$ wird *Instanz* von P genannt.

- Beispiele

$(\forall X (\text{gerade}(X) \vee \text{null}(X)) \{X/0\})$

$\equiv \forall X (\text{gerade}(X) \vee \text{null}(0))$

$(\text{vater}(X)) \{X/\text{vater}(\text{anton})\}$

$\equiv \text{vater}(\text{vater}(\text{anton}))$

Normalformen

- prädikatenlogische Ausdrücke können in äquivalente Ausdrücke umgeformt werden
- Beispiel

$$\forall X (\text{mensch}(X) \rightarrow \text{sterblich}(X))$$

$$\equiv$$

$$\forall X (\neg \text{mensch}(X) \vee \text{sterblich}(X))$$

$$\equiv$$

$$\forall X (\neg (\text{mensch}(X) \wedge \neg \text{sterblich}(X)))$$

$$\equiv$$

$$\neg \exists X (\text{mensch}(X) \wedge \neg \text{sterblich}(X))$$
- gesucht: Normalformen für prädikatenlogische Ausdrücke

Prädikatenlogik 13

Anwendung: Analyse natürlichsprachlicher Sätze

- natürlichsprachliche Sätze können auch in Prädikatenlogik übersetzt werden
- Beispiel 1

Jeder im Raum spricht Französisch oder Deutsch.

Umformulierung in halbformale Darstellung

Für alle X gilt, wenn X eine Person im Raum ist, dann spricht X Französisch oder spricht X Deutsch.

Einführung von Prädikaten

r/1 "ist eine Person im Raum"

f/1 "spricht Französisch"

d/1 "spricht Deutsch"

prädikatenlogische Formel

$$\forall X (r(X) \rightarrow (f(X) \vee d(X)))$$

Prädikatenlogik 15

Normalformen: Pränexform

- Pränexform

Ein prädikatenlogischer Ausdruck ist in Pränexform, wenn er die Form

$$Q_1 X_1 (Q_2 X_2 \dots (Q_n X_n (A) \dots))$$

hat, wobei Q_i Quantoren sind, X_i Variable und A keine Quantoren enthält.
- Beispiel

$$\neg \forall X (p(X, Y) \wedge q(U) \wedge \neg (\forall Z (r(Z)) \vee s(W)))$$

$$\equiv$$

[Regel: $\neg \forall X (p(X)) \equiv \exists X (\neg p(X))$]

$$\exists X (\neg p(X, Y) \wedge q(U) \wedge \neg \forall Z (r(Z)) \wedge \neg s(W))$$

$$\equiv$$

[Regel: $\neg (\forall X (p(X))) \equiv \exists X (\neg p(X))$]

$$\exists X (\neg p(X, Y) \wedge q(U) \wedge \exists Z (\neg r(Z)) \wedge \neg s(W))$$

$$\equiv$$

[Regel: $(\exists X P) \wedge Q \equiv \exists X (P \wedge Q)$]

[Regel: Assoziativität von \wedge]

$$\exists X \exists Z (\neg p(X, Y) \wedge q(U) \wedge \neg r(Z) \wedge \neg s(W))$$
- Zu jeder prädikatenlogischen Formel gibt es (mindestens) eine logisch äquivalente Pränexform.

Prädikatenlogik 14

Anwendung: Analyse natürlichsprachlicher Sätze

- Beispiel 2

Einige Personen sagen einige Zeit die Wahrheit, andere lügen nie.

Umformulierung

Es gibt eine Person P1 und es gibt einen Zeitpunkt T1, an dem P1 die Wahrheit sagt. Es gibt eine Person P2, die verschieden von P1 ist und zu allen Zeitpunkten T2 nicht lügt.

Einführung von Prädikaten

p/1 "ist eine Person"

z/1 "ist ein Zeitpunkt"

w/2 "sagt die Wahrheit zu einem Zeitpunkt"

l/2 "lügt zu einem Zeitpunkt"

v/2 "sind verschieden"

prädikatenlogische Formel

$$\exists P1 (\exists T1 (p(P1) \wedge z(T1) \wedge w(P1, T1)))$$

$$\wedge$$

$$\exists P2 (p(P2) \wedge v(P1, P2) \wedge \forall T2 (z(T2) \rightarrow \neg l(P2, T2)))$$

Die Information, dass sich w/2 und l/2 gegenseitig ausschließen, ist nicht explizit bekannt, und kann deshalb nicht zur Vereinfachung verwendet werden.

Prädikatenlogik 16

Semantik der Prädikatenlogik

- Wann sind Ausdrücke der Prädikatenlogik wie $p(a, X)$ wahr?
- Idee: Ausdrücke der Prädikatenlogik werden als wahr bezeichnet, wenn sie einen wahren Sachverhalt im Diskursbereich beschreiben
- Formal: Ausdrücke erhalten ihren Wahrheitswert durch eine Interpretation I und eine Variablenbelegung V in einem Diskursbereich D
(Alternativ wird das Tupel $\langle D, I \rangle$ als Interpretation bezeichnet. Oft nimmt man jedoch D als gegeben an und diskutiert nur I .)

- Interpretation I

Konstante c	$I(c) \in D$
Funktionszeichen f mit Arität n	$I(f): D^n \rightarrow D$
Relationszeichen r mit Arität n	$I(r) \subseteq D^n$

- Variablenbelegung V

Variable X	$V(X) \in D$
--------------	--------------

Prädikatenlogik 17

Semantik der Prädikatenlogik

- Beispiel

Term $p(X, q(a))$

D sei die Menge der Peano Zahlen mit den Funktionen $s/1$ und $+/2$

Wir wählen

$$I(a) = s(0)$$

$$I(p/2) = +/2$$

$$I(q/1) = s/1$$

$$V(X) = s(s(s(0)))$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} I \bullet V(p(X, q(a))) &= I(p)(V(X), I(q)(I(a))) \\ &= +(s(s(s(0))), s(s(0))) \\ &= s(s(s(s(s(0)))) \in D \end{aligned}$$

Prädikatenlogik 19

Semantik der Prädikatenlogik

- Interpretation I und Variablenbelegung V definieren zusammen die Abbildung $I \bullet V(t)$ eines beliebigen Terms t auf Objekte des Diskursbereichs

Konstante c	$I \bullet V(c) = I(c) \in D$
Variable X	$I \bullet V(X) = V(X) \in D$
$f(t_1, \dots, t_n)$	$I \bullet V(f(t_1, \dots, t_n)) = I(f)(I \bullet V(t_1), \dots, I \bullet V(t_n)) \in D$
- Man beachte, dass die verwendeten Symbole – $I, V, I \bullet V, c, t, \dots$ – nicht Elemente der Sprache der Prädikatenlogik, sondern Elemente einer Metasprache sind, in der wir über die Sprache der Prädikatenlogik sprechen.

Prädikatenlogik 18

Semantik der Prädikatenlogik

- Wahrheitswerte prädikatenlogischer Ausdrücke

Gegeben ein Diskursbereich D kann jedem prädikatenlogischen Ausdruck P unter der Interpretation I und der Variablenbelegung V ein Wahrheitswert aus $\{W, F\}$ zugeordnet werden.

Da der Wahrheitswert von P im allgemeinen von I und V abhängt, führt man den Begriff der Erfüllbarkeit als relative Wahrheit ein.

$\models_I P [V]$ bedeutet, dass P von der Interpretation I und der Variablenbelegung V erfüllt wird, d.h. bezüglich I und V wahr ist.

$\not\models_I P [V]$ bedeutet, dass P von der Interpretation I und der Variablenbelegung V nicht erfüllt wird.

- atomare Ausdrücke

Ausdruck ist $r(t_1, \dots, t_n)$ mit dem Relationszeichen r/n und den Termen t_1, \dots, t_n .

$\models_I r(t_1, \dots, t_n) [V]$ genau dann, wenn das Tupel

$$\langle I \bullet V(t_1), \dots, I \bullet V(t_n) \rangle \in I(r)$$

- Spezialfall

Der atomare Ausdruck \perp ist durch keine Interpretation und keine Variablenbelegung erfüllbar, d.h. \perp hat immer den Wahrheitswert F .

Prädikatenlogik 20

Semantik der Prädikatenlogik

- Ausdrücke mit Konnektoren

$\models_I (\neg P) [V]$ genau dann, wenn $\not\models_I P [V]$

$\models_I (P \wedge Q) [V]$ gdw. $\models_I P [V]$ und $\models_I Q [V]$

$\models_I (P \vee Q) [V]$ gdw. $\models_I P [V]$ oder $\models_I Q [V]$

$\models_I (P \rightarrow Q) [V]$ gdw. $\not\models_I P [V]$ oder $\models_I Q [V]$

Diese Definitionen entsprechen den Wahrheitstabellen der Aussagenlogik.

- universell quantifizierte Ausdrücke

Informell: $\forall X (P)$ wird genau dann erfüllt, wenn P für alle Belegungen der Variablen X erfüllt wird.

Formal: $\models_I (\forall X P) [V]$ genau dann, wenn $\models_I P [W]$ für alle $d \in D$, wobei $W(X) = d$ und $W(Y) = V(Y)$ für alle $Y \neq X$.

- existentiell quantifizierte Ausdrücke

Informell: $\exists X (P)$ wird genau dann erfüllt, wenn P für mindestens eine Belegung der Variablen X erfüllt wird.

Formal: $\models_I (\exists X P) [V]$ genau dann, wenn $\models_I P [W]$ für mindestens ein $d \in D$, wobei $W(X) = d$ und $W(Y) = V(Y)$ für alle $Y \neq X$.

Prädikatenlogik 21

Modelle

- Modelle

D sei ein Wertebereich, I eine Interpretation

Ein Ausdruck P wird in der Interpretation I wahr genannt und I heisst ein Modell dieses Ausdrucks, wenn P für alle Variablenbelegungen wahr ist.

Ist ein geschlossener Ausdruck für eine Variablenbelegung wahr, dann gilt das für alle Variablenbelegungen.

- Es kann mehr als ein Modell geben.
- Eine Interpretation I, die eine Menge von Ausdrücken M für alle Variablenzuordnungen wahr macht, heisst ein Modell von M.
- Menge von prädikatenlogischen Ausdrücken heisst
 - erfüllbar, wenn sie mindestens ein Modell hat
 - widerlegbar, wenn es mindestens eine Interpretation gibt, die kein Modell ist
 - tautologisch oder gültig, wenn jede Interpretation ein Modell ist
 - inkonsistent, wenn sie kein Modell hat

Prädikatenlogik 23

Semantik der Prädikatenlogik

- Beispiel

Ausdruck $\text{even}(p(X, q(a)))$

D sei die Menge der Peano Zahlen mit den Funktionen s/1 und +/2

Wir wählen

$I(a) = s(0)$

$I(p/2) = +/2$

$I(q/1) = s/1$

$V(X) = s(s(s(0)))$

$I(\text{even}) = \{0, s(s(0)), s(s(s(s(0))))\} \subseteq D$

$p(X, q(a)) \rightarrow +(s(s(s(0))), s(s(0))) = s(s(s(s(s(0)))) \in D$

Damit gilt

$\not\models_I \text{even}(p(X, q(a))) [V]$

denn $s(s(s(s(s(0)))) \notin I(\text{even})$

Prädikatenlogik 22

Modelle: Beispiel

- gegeben sei die Menge von Ausdrücken
 - $\{p(a), \forall X (p(X) \rightarrow q(X))\}$
- Modell 1
 - $I_1(a) = \text{Sokrates}$
 - $I_1(p) = \text{menschlich: } \{\text{Sokrates, Platon, Meier, ...}\}$
 - $I_1(q) = \text{sterblich: } \{\text{Sokrates, Platon, Meier, ...}\}$
- Modell 2
 - $I_2(a) = 8$
 - $I_2(p) = \text{durch}_4\text{-teilbar: } \{0, 4, 8, \dots\}$
 - $I_2(q) = \text{gerade: } \{0, 2, 4, \dots\}$
- es gibt unendlich viele Modelle
- man interessiert sich jedoch meistens nur für das *intendierte* Modell und wählt die Namen von Konstanten, Funktionen und Prädikaten entsprechend
 - $\{\text{menschlich}(\text{sokrates}), \forall X (\text{menschlich}(X) \rightarrow \text{sterblich}(X))\}$
- Wahl der Namen erhöht nur die Lesbarkeit; Namen sind jedoch beliebig; es gibt nach wie vor unendlich viele Modelle
- Schluss: logische Aussagen legen den Diskursbereich nicht eindeutig fest

Prädikatenlogik 24

Folgerungsrelation

- Folgerungsrelation, logische Konsequenz

M und N sind Mengen prädikatenlogischer Ausdrücke

Es gilt die logische Konsequenz $M \models N$, wenn **jedes** Modell der Menge M auch ein Modell der Menge N ist, d.h.

- Beispiel

$\{p(a), \forall X (p(X) \rightarrow q(X))\} \models q(a)$

wenn **jedes** Modell der linken Seite auch Modell der rechten Seite ist

Problem: es gibt unendlich viele Modelle

- Lösung des Problems durch logische Deduktion