

---

## Halteproblem

---

- Wie kann man feststellen, ob ein Programm terminiert?
- Testen: man prüft für bestimmte Eingabewerte, ob das Programm nach endlicher Zeit terminiert  
 Resultat *ja*: OK  
 Resultat *nein*: keine Aussage möglich
- Programme können in eine unendliche Schleife oder in eine unendliche Rekursion geraten
- Frage: Gibt es einen allgemeinen Algorithmus, der für ein gegebenes Programm und gegebene Eingabewerte nach endlicher Zeit feststellt, ob das Programm terminiert oder nicht?
- Antwort: Nein, es gibt keinen solchen allgemeinen Algorithmus: das Halteproblem ist nicht entscheidbar, aber semi-entscheidbar.
- Testen ist – zusätzlich zu seiner Bedeutung bei der Validierung von Programmen gegenüber den Anforderungen – das mächtigste Verfahren, um die Terminierung eines Programms festzustellen

Halteproblem 1

---

## Halteproblem

---

- $\mathbf{P}$  ist die Menge aller WHILE Programme und  $G: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{N}_0$  eine *bijektive* Gödelisierung, d.h.  
 zu jedem Programm  $p \in \mathbf{P}$  gibt es genau eine natürliche Zahl  $G(p) \in \mathbf{N}_0$   
 jede natürliche Zahl  $n$  kann als das WHILE Programm  $G^{-1}(n) \in \mathbf{P}$  interpretiert werden
- Gegeben ein WHILE Programm  $p \in \mathbf{P}$  und eine natürliche Zahl  $x$ . Terminiert  $p$  für  $x$ ?
- Angenommen, es gibt ein WHILE Programm  $T$ , das diese Frage für beliebige WHILE Programme  $p$  und Eingabewerte  $x$  entscheidet.
  - $T$  bekommt 2 Eingabewerte:  $x_1 = G(p)$  und  $x_2 = x$
  - $T$  terminiert mit  $x_0 = 1$ , wenn  $p$  für  $x$  terminiert
  - $T$  terminiert mit  $x_0 = 0$ , wenn  $p$  für  $x$  nicht terminiert
  - $T'$  ist das Programm
 
$$\begin{array}{l} x_2 := x_1; \\ T; \\ \text{WHILE } x_0 \neq 0 \text{ DO } x_0 := x_0 \text{ OD} \end{array}$$
  - wir starten  $T'$  mit der Eingabe  $G(T')$
  - $T'$  terminiert für diese Eingabe genau dann, wenn  $T$  terminiert, d.h. wenn  $T$  für  $x_1 = G(T')$  und  $x_2 = G(T')$  mit  $x_0 = 1$  terminiert
  - aber genau für diesen Fall terminiert  $T'$  nicht
  - Widerspruch  $\Rightarrow$  Programm  $T$  kann nicht existieren

Halteproblem 2

---

## Äquivalenzproblem & Korrektheitsproblem

---

- Äquivalenz zweier Programme – d.h. für die gleiche Eingabe die gleiche Ausgabe erzeugen – ist nicht entscheidbar.
- Also ist auch nicht entscheidbar, ob ein Programm eine (formale) Spezifikation erfüllt.
- Korrektheit eines Programm – d.h. eine gegebene Funktion berechnen – ist nicht entscheidbar.

Halteproblem 3