5 Relationen

Formale Grundlagen der Informatik I

Herbstsemester 2012

Robert Marti

Vorlesung teilweise basierend auf Unterlagen
von Prof. emer. Helmut Schauer

Allgemeine Definition einer Relation

Eine n-stellige **Relation** R (relation of arity n) ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes von n Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n > 0)$:

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Relationen der Stelligkeit $n = 1$ heissen auch **unär** (unary)
Relationen der Stelligkeit $n = 2$ heissen auch **binär** (binary)
Relationen der Stelligkeit $n = 3$ heissen auch **ternär** (ternary)

Die Mengen $A_i, A_j, 1 \leq i < j \leq n$ können verschieden sein.

Ein Element $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ wird als (n-) Tupel bezeichnet.

Beispiel einer Relation

Seien $\boldsymbol{D}rivers = \{ Algersuari, Alonso, Buemi, Button, \ldots , Vettel, Webber \}$

$\boldsymbol{T}eams = \{ RBR, McLaren , Ferrari , Mercedes, \ldots , Virgin \}$

$\boldsymbol{P}oints = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots , 450 \}$

3 Mengen

Sei $R \subseteq D \times T \times P$ die Relation, welche Fahrer, deren Teams sowie deren (momentane) Punktzahl in der Formel 1 Fahrerweltmeisterschaft 2011 in Beziehung setzen:

$$\begin{aligned} R = \{ \; & (Vettel, RBR, 349) , \; (Webber, RBR, 209) , (Alonso, Ferrari, 212), \\ & (Rosberg, Mercedes, 67) , (Glock, Virgin, 0) , (Trulli, Lotus, 0) , \ldots \} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Eine Relation R wird häufig auch in Form einer Tabelle dargestellt.
- Da R eine Menge ist, ist die Reihenfolge ihrer Elemente nicht definiert!

Binäre Relation

Eine **binäre Relation** R ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes zweier Mengen A und B:

$$R \subseteq A \times B$$

Statt

$$(a, b) \in R$$

wird auch die Notation

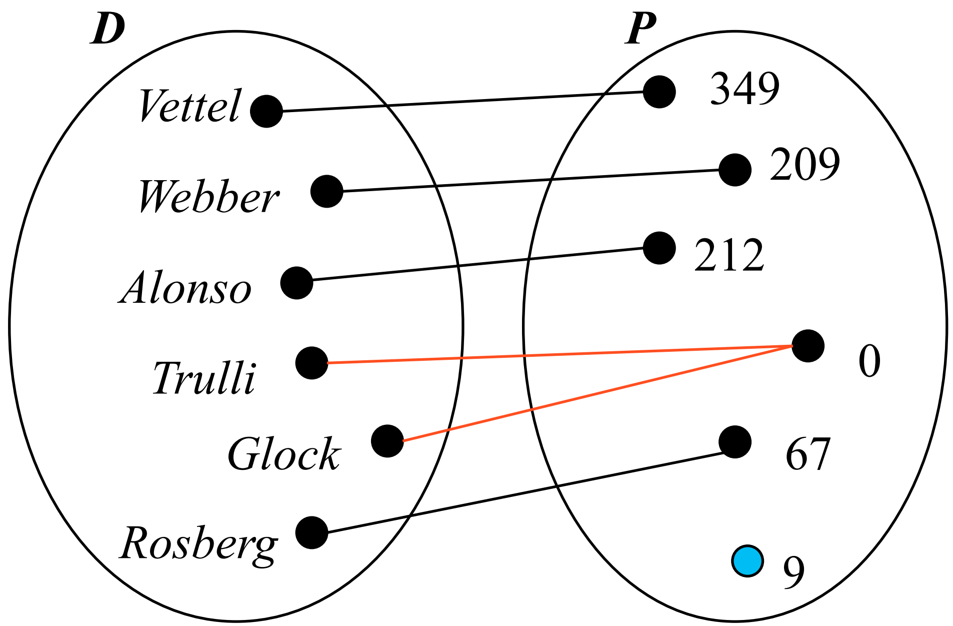
$$aRb$$

verwendet.

Visualisierung binärer Relationen

Eine binäre Relation R kann veranschaulicht werden, indem ein Paar (a, b) als Kante ("Verbindung") zwischen den Elementen $a \in A$ und $b \in B$ visualisiert wird.

$$R \subseteq \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{P} = \{ (Vettel, 349), (Webber, 209), (Alonso, 212), (Trulli, 0), (Glock, 0), (Rosberg, 67) \}$$



Dabei interessieren manchmal Antworten auf Fragen wie minimal und maximal mögliche Anzahl von Elementen $a \in A$ zu jedem $b \in B$ (und umgekehrt).

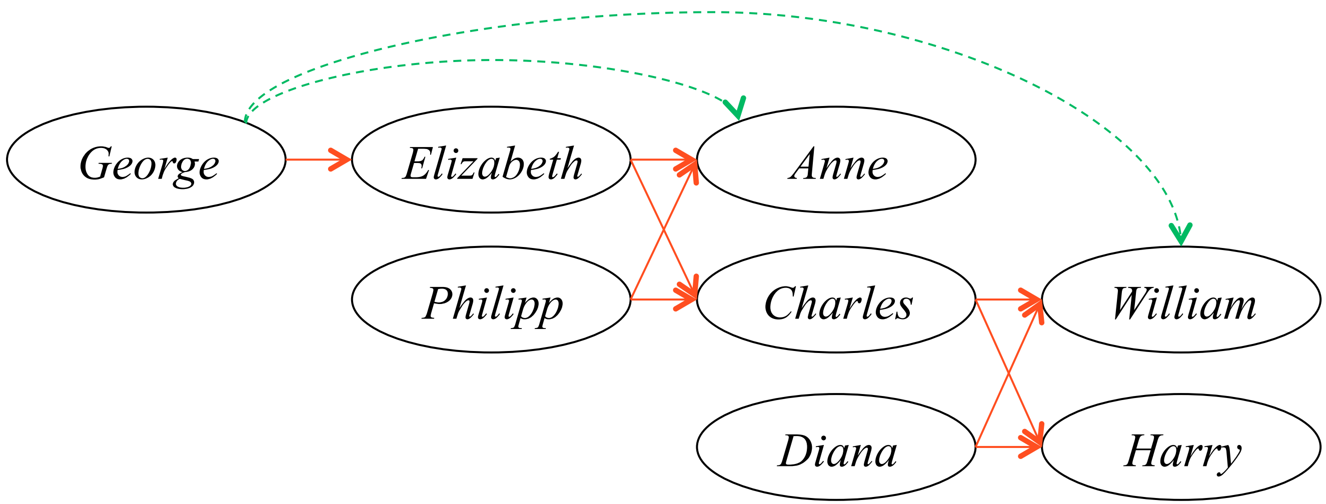
Binäre Relationen und Graphen

Eine binäre Relation $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$ (also Paare von Elementen *einer* Menge $\boldsymbol{S}$) kann durch einen Graphen veranschaulicht werden, indem jedes Paar (a, b) als Kante zwischen den Knoten a und b interpretiert wird.

Umgekehrt entspricht jede Kante $a \to b$ eines Graphen, die zwei Knoten a und b verbindet, einem Element einer Relation R, für die aRb als „a ist mit b direkt verbunden" interpretiert werden kann.

George Parent Elizabeth
Elisabeth Parent Anne
…

George Ancestor Elizabeth
Elisabeth Ancestor Anne
George Ancestor Anne
…



Bem.: *Ancestor* ist transitiv, *Parent* nicht (siehe später).

Eigenschaften binärer Relationen: Reflexivität

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist **reflexiv**, wenn jedes Element der Menge S zu sich selbst in Relation steht:

$$\forall\, x\colon\; x \in S\colon\; xRx$$

zB: die Relation „hat dieselbe Mutter wie“ ist reflexiv

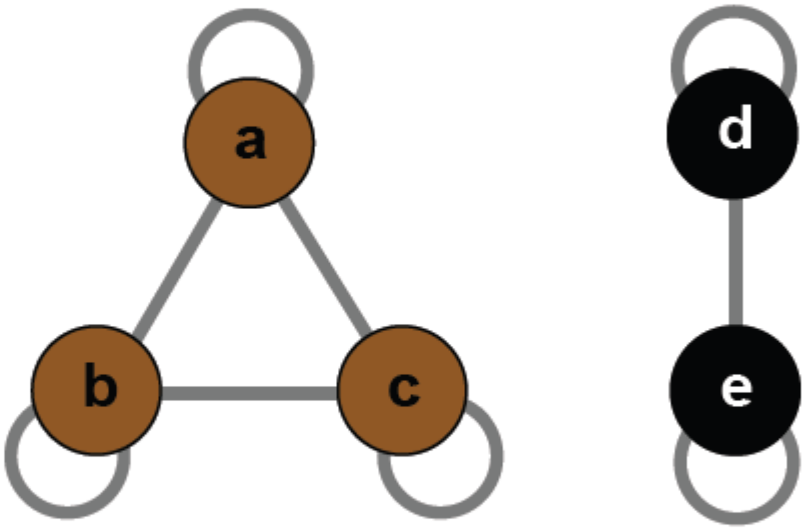
Reflexive Relationen können durch einen Graphen modelliert werden, bei dem alle Knoten Schlaufen haben.

Beispiel einer reflexiven Relation

Same_Haircolor,

z.B. d $\underline{Same\_Haircolor}$ d , d $\underline{Same\_Haircolor}$ e , e $\underline{Same\_Haircolor}$ e , ...

Graph



M	a	b	c	d	e
a	1	1	1		
b	1	1	1		
c	1	1	1		
d				1	1
e				1	1

sog. Adjazenzmatrix:

$M[x,y] = 1$ falls x $\underline{Same\_Haircolor}$ y

bei reflexiver Rel. sind alle Elemente der Diagonale 1

Eigenschaften binärer Relationen: Irreflexivität

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist **irreflexiv**, wenn kein Element von S zu sich selbst in Relation steht:

$$\forall x\colon\ x \in S\colon\ \neg\, xRx$$

zB: die Relation „ist Kind von" ist irreflexiv

Irreflexive Relationen können durch einen schlaufenfreien Graphen modelliert werden.

Beispiel einer irreflexiven Relation (1)

Beats,

z.B. $A\ \underline{\mathit{Beats}}\ K$, $K\ \underline{\mathit{Beats}}\ D$, $D\ \underline{\mathit{Beats}}\ B$, ...

Graph:

M	10	B	D	K	A
10					
B	1				
D		1			
K			1		
A				1	

sog. Adjazenzmatrix:

$M[x,x] = 0$ falls $x\ \underline{\mathit{Beats}}\ y$

bei irrreflexiver Rel. sind alle Elemente der Diagonale 0

Beispiel einer irreflexiven Relation (2)

Borders,

z.B. *Switzerland* <u>*Borders*</u> *Germany* , ...

Eigenschaften binärer Relationen: Symmetrie

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist **symmetrisch**, wenn aus xRy auf yRx geschlossen werden kann:

$$\forall\, x, y\colon\; x, y \in S\colon\; xRy \;\Rightarrow\; yRx$$

zB: die Relation „ist verheiratet mit“ ist symmetrisch

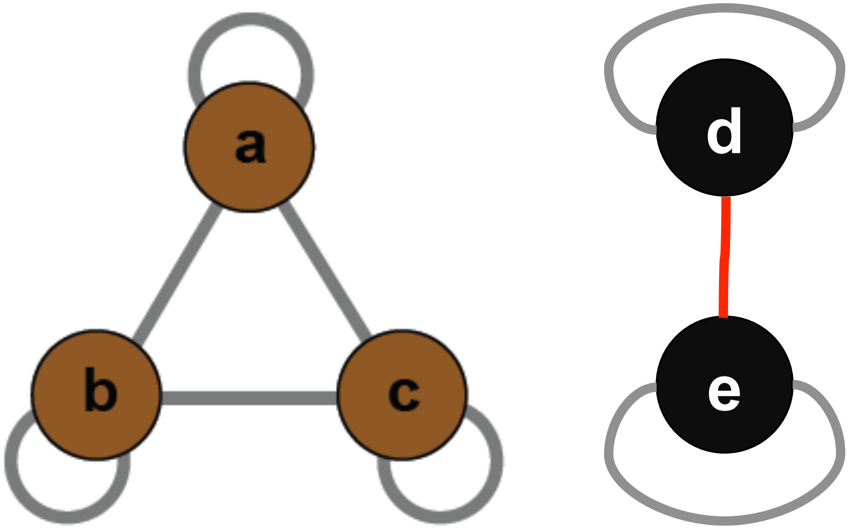
Symmetrische Relationen entsprechen ungerichteten Graphen.

Beispiel einer symmetrischen Relation (1)

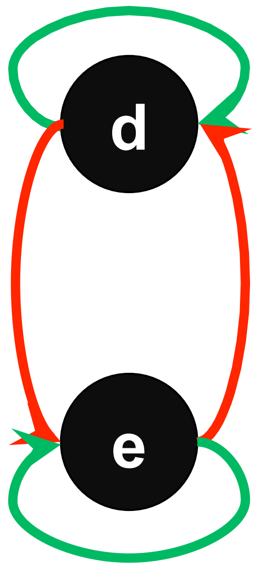
Same_Haircolor,

z.B. *d* <u>*Same_Haircolor*</u> *d* , *d* <u>*Same_Haircolor*</u> *e* , *e* <u>*Same_Haircolor*</u> *d* , ...

(**ungerichteter**) Graph:



rechter Teil als **gerichteter** Graph:



M	a	b	c	d	e
a	1	1	1		
b	1	1	1		
c	1	1	1		
d				1	1
e				1	1

sog. Adjazenzmatrix ist symmetrisch:

$M[x,y] = M[y,x]$

Beispiel einer symmetrischen Relation (2)

Borders,

z.B. *Switzerland* <u>*Borders*</u> *Germany* , *Germany* <u>*Borders*</u> *Switzerland* , …

Eigenschaften binärer Relationen: Antisymmetrie

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ heisst **antisymmetrisch** (manchmal auch identitiv), wenn xRy und yRx nur dann gleichzeitig gelten kann, wenn x und y gleich sind:

$$\forall\, x, y\colon\; x, y \in S\colon\; (xRy \wedge yRx) \;\Rightarrow\; x = y$$

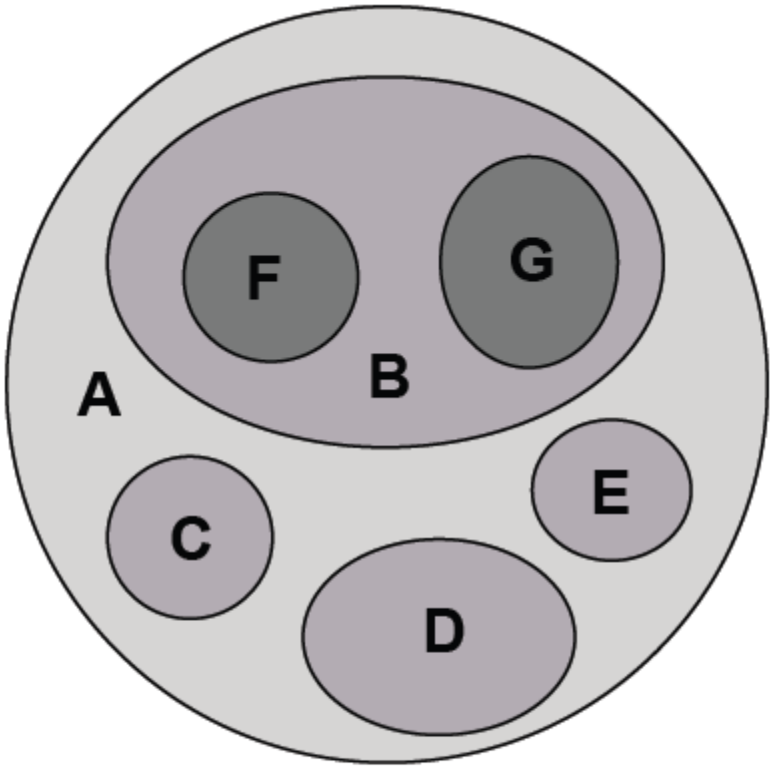
zB: die Relation $\leq$ ist antisymmetrisch

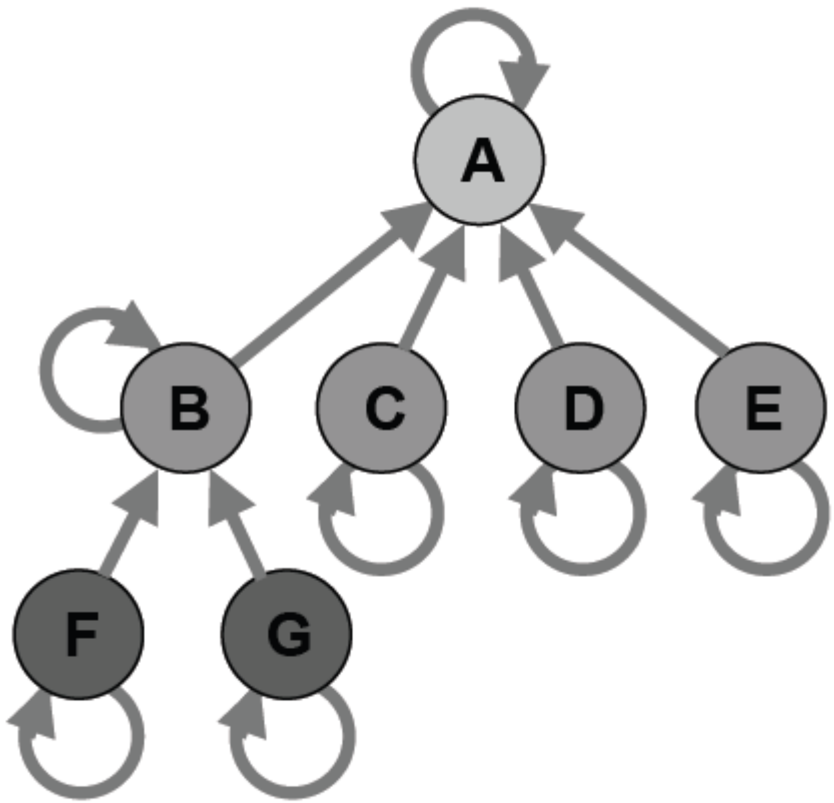
Antisymmetrische Relationen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.

Beispiel einer antisymmetrischen Relation

$Subset$ (bzw. $\subseteq$)

z.B. $\color{red}{A \subseteq A}$, $B \subseteq A$, ...





Eigenschaften binärer Relationen: Asymmetrie

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist **asymmetrisch**, wenn xRy und yRx nicht gleichzeitig gelten kann:

$$\forall\, x, y \colon x, y \in S \colon\ xRy \;\Rightarrow\; \neg\, yRx$$

zB: die Relation „ist Kind von" ist asymmetrisch

Eine Relation ist genau dann asymmetrisch, wenn sie antisymmetrisch und irreflexiv ist.

Auch asymmetrische Relationen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.

Beispiel einer asymmetrischen Relation

Beats,

z.B. $A\ \underline{Beats}\ K$, $K\ \underline{Beats}\ D$, $D\ \underline{Beats}\ B$, …, ~~$K\ \underline{Beats}\ A$~~

Graph:

M	10	B	D	K	A
10					
B	1				
D		1			
K			1		
A				1	

sog. Adjazenzmatrix:

$M[x,y] = 1 \Rightarrow M[y,x] = 0$

Eigenschaften binärer Relationen: Unsymmetrische Relationen

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist **unsymmetrisch**, wenn aus xRy nicht notwendigerweise yRx folgt:

$$\exists\, x, y\colon\ x, y \in S\colon\ xRy \ \wedge\ \neg yRx$$

Die Relation "kennt" zwischen Personen ist im allgemeinen unsymmetrisch – zumindest wenn der Begriff z.B. auf "erkennt den Namen aufgrund eines Bildes" eingeschränkt ist.

Auch unsymmetrische Relationen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.

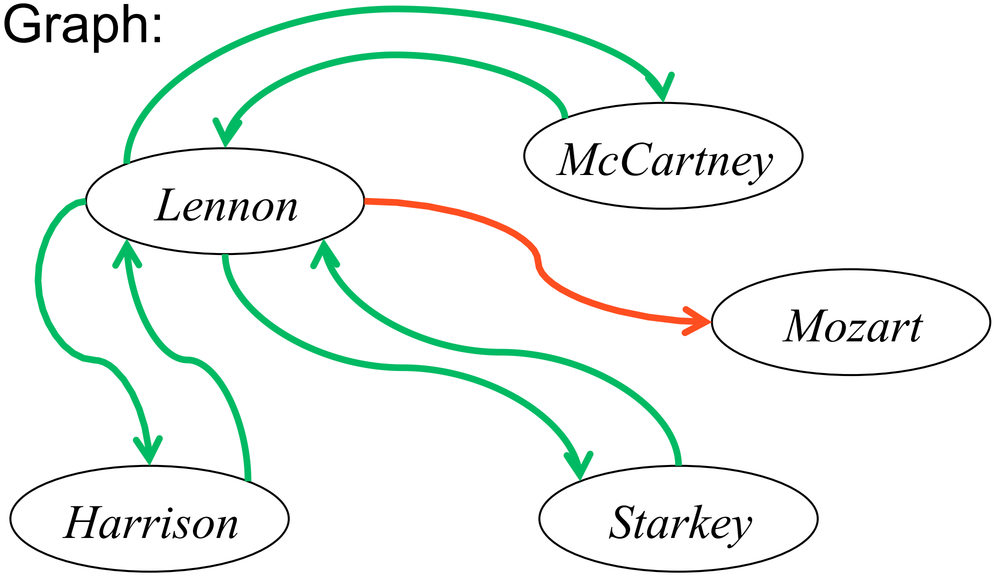
Beispiel einer unsymmetrischen Relation

Knows,

z.B. *Lennon* *Knows* *McCartney* , *McCartney* *Knows* *Lennon* , … ,

Lennon *Knows* *Mozart* , ~~*Mozart Knows Lennon*~~

Graph:



Adjazenzmatrix:

M	*Len*	*McC*	*Har*	*Sta*	*Moz*
Len	1	1	1	1	**1**
McC	1	1	1	1	1
Har	1	1	1	1	1
Sta	1	1	1	1	1
Moz	**0**	0	0	0	1

Eigenschaften binärer Relationen: Transitivität

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist **transitiv**, wenn aus xRy und yRz auf xRz geschlossen werden kann:

$$\forall\, x, y, z\colon\ x, y, z \in S\colon\ (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

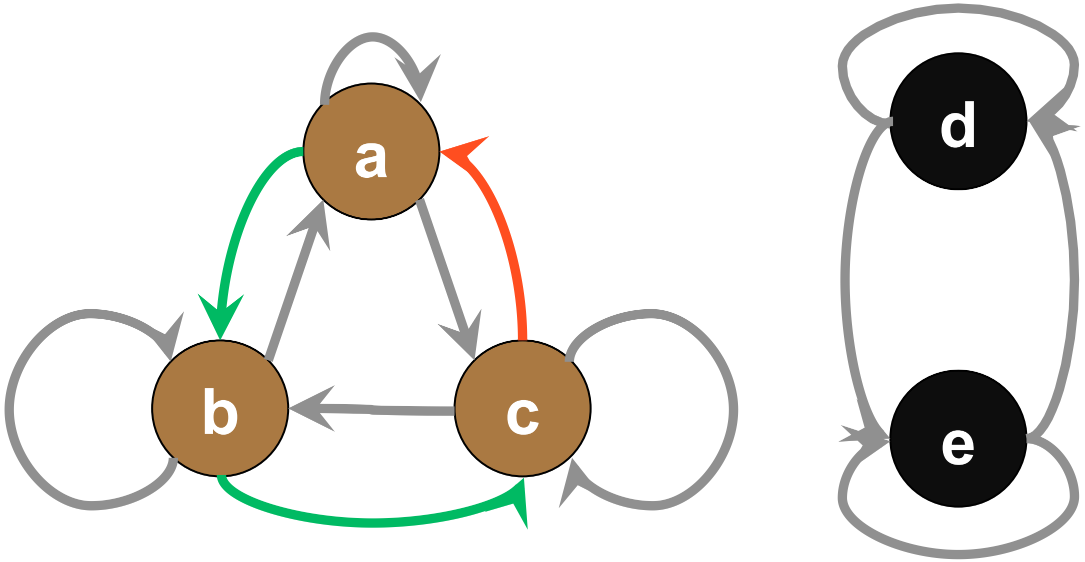
zB: die Relation „ist Vorfahre von" ist transitiv

Beispiel einer transitiven Relation (1)

Same_Haircolor,

z.B. *a* <u>*Same_Haircolor*</u> *b* , *b* <u>*Same_Haircolor*</u> *c* , *a* <u>*Same_Haircolor*</u> *c* , ...

(**gerichteter**) Graph:



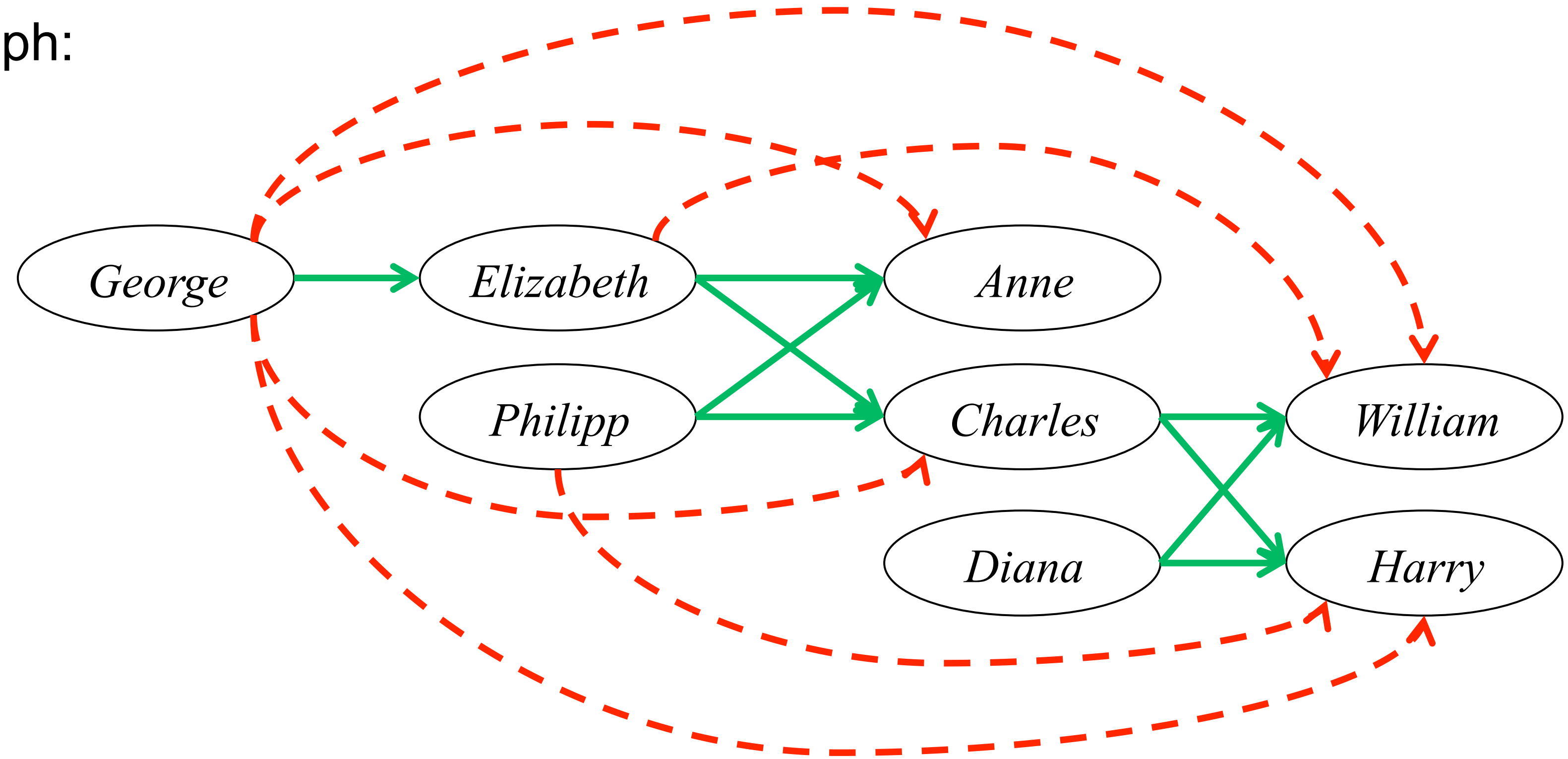
Beispiel einer transitiven Relation (2)

Ancestor ,

z.B. *George* *Ancestor* *Elisabeth* , *Elisabteh* *Ancestor* *Charles* ,

George *Ancestor* *Charles* , ...

Graph:



Bem: Es sind nicht alle Kanten eingezeichnet.

Transitive Hülle

Die **transitive Hülle** $R_{closure}$ (auch transitiver Abschluss genannt, engl. transitive closure) einer binären Relation $R \subseteq S \times S$ ist diejenige binäre Relation, in der die direkt gegebenen Beziehungen mit allen durch die Transitivität herleitbaren (indirekten) Beziehungen ergänzt werden.

Definition durch prädikatenlogische Formeln:

$$\forall\, x, y\colon\ x, y \in S\colon\quad R(x, y) \ \rightarrow\ R_{closure}(x, y)$$

$$\forall\, x, y, z\colon\ x, y, z \in S\colon\quad R(x, y)\ \wedge\ R_{closure}(y, z) \ \rightarrow\ R_{closure}(x, z)$$

Beispiel einer transitiven Hülle

Beats,

z.B. A <u>*Beats*</u> K, K <u>*Beats*</u> D, D <u>*Beats*</u> B, A <u>*Beats*</u> B, …

Graph:

Adjazenzmatrix:

M	10	B	D	K	A
10					
B	1				
D	1	1			
K	1	1	1		
A	1	1	1	1	

hergeleitete indirekte Beziehungen

Eigenschaften binärer Relationen: Zyklenfreiheit

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist **azyklisch**, wenn es keine Folge $x_1, x_2, ..., x_n \quad (n > 0)$ gibt, für die x_1Rx_2 und x_2Rx_3 und ... und $x_{n-1}Rx_n$ sowie x_nRx_1 gilt:

$$
\begin{aligned}
&\forall\, n\colon\; n \in \mathbf{N} : \\
&\quad \neg\, (\, \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in S\colon \\
&\qquad x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \wedge ... \wedge x_{n-1}Rx_n \wedge x_nRx_1 \,)
\end{aligned}
$$

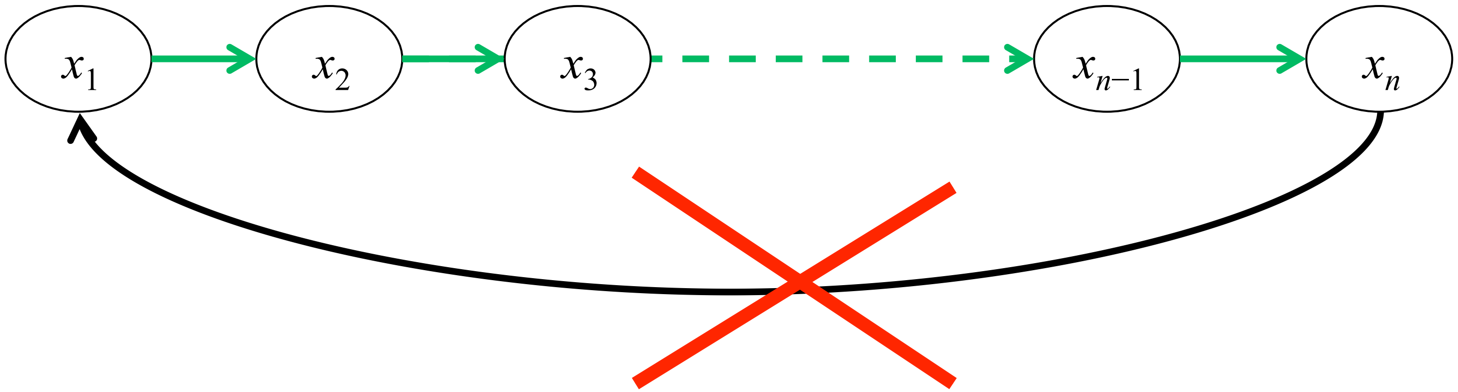
Jede azyklische Relation ist irreflexiv.

zB: die Relation „ist Vorfahre von“ ist azyklisch

Azyklische Relationen können durch azyklische Graphen modelliert werden.

Zyklenfreiheit

Graph:



Totale Relationen

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ heisst **total**, wenn für zwei beliebige Elemente x und y aus S entweder xRy oder yRx (oder beides!) gilt:

$$\forall\, x, y\colon\; x, y \in S\colon\; (xRy \vee yRx)$$

Totale Relationen sind reflexiv (denn xRy muss auch für $x = y$ gelten).

zB: die Relation „ist nicht älter als“ ist total
(nicht aber die Relation "ist jünger als"!)

Eigenschaften binärer Relationen: Ordnungsrelationen

Eine (nicht strikte) **Ordnungsrelation** ist eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$, die

- reflexiv,
- antisymmetrisch und
- transitiv

ist.

zB: die Relation „ist nicht älter als“ ist eine Ordnungsrelation

Ordnungsrelationen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.

Bem.: In einigen Büchern wird statt des Begriffs "Ordnungrelation" der Begriff "Halbordnung" verwendet.

Eigenschaften binärer Relationen: Totale Ordnung

Eine Ordnungsrelation ist **total** (auch **linear** genannt), wenn für zwei beliebige Elemente x und y aus S entweder xRy oder yRx gilt:

$$\forall\, x, y\colon\ x, y \in S\colon\ (xRy\ \lor\ yRx)$$

zB: die auf Personen angewandte Relation „ist nicht älter als“ bildet eine **totale Ordnung**

In einer totalen Ordnung sind alle Elemente miteinander vergleichbar.

Eigenschaften binärer Relationen: Halbordnung

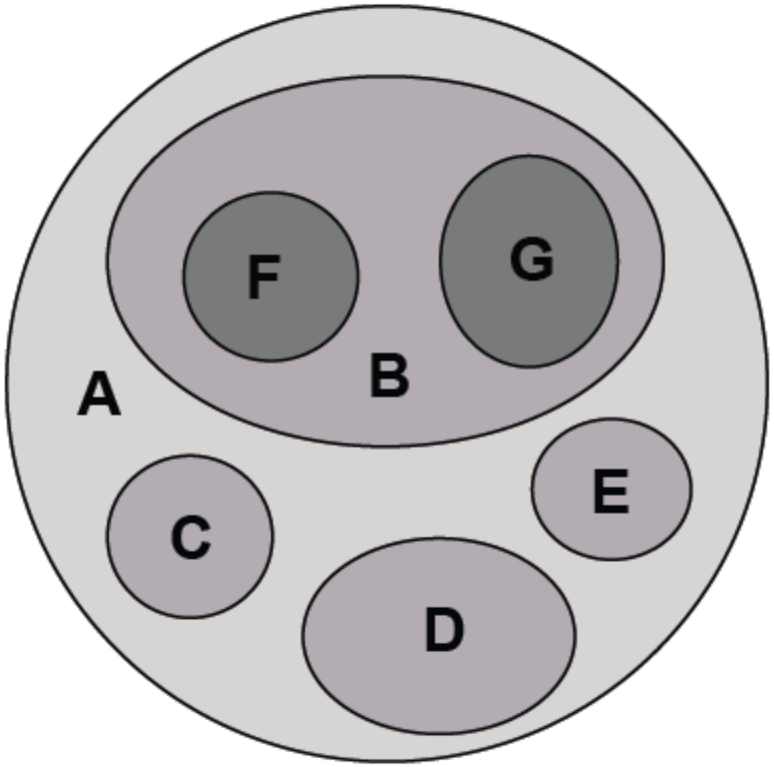
Eine Ordnungsrelation ist **partiell** oder eine **Halbordnung**, wenn es Elemente gibt, die nicht miteinander vergleichbar sind:

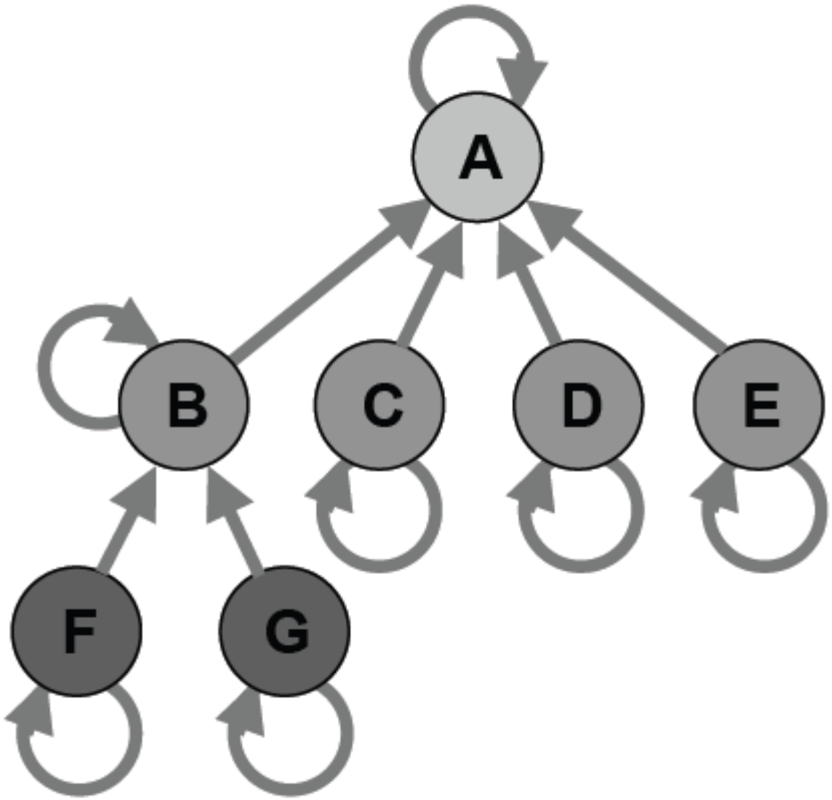
$$\exists\, x, y\colon\ x, y \in S\colon\ (\neg\, xRy \ \wedge\ \neg\, yRx)$$

zB: die auf Mengen anwendbare Relation „ist Teilmenge von“ bildet eine Halbordnung

Beispiel einer Halbordnung bzw. partiellen Ordnung (1)

Subset (bzw. $\subseteq$)
z.B. gilt $C \not\subseteq F$ und $F \not\subseteq C$ (sowie $F \neq C$)

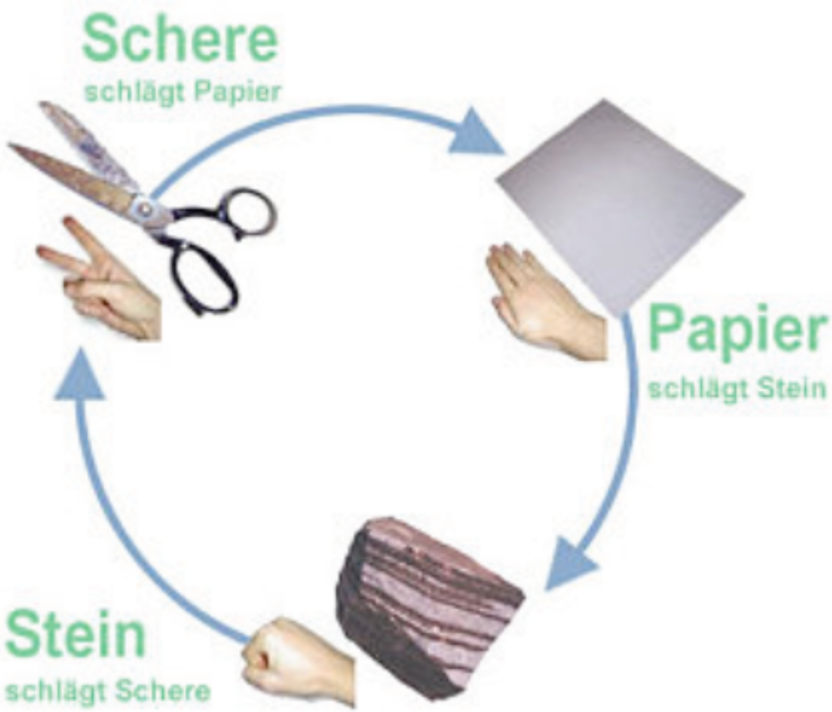




Beispiel einer Halbordnung bzw. partiellen Ordnung (2)

schlägt (Auswahlverfahren gemäss "Schere-Stein-Papier")

Regeln: *Schere* <u>*schlägt*</u> *Papier* , *Papier* <u>*schlägt*</u> *Stein* , *Stein* <u>*schlägt*</u> *Schere*



Warum ist dies eine Halbordnung?

Weil $\exists\, x, y\colon\ x, y \in S\colon\ (\neg\, xRy \ \wedge\ \neg\, yRx)$!   z.B. $x = y = Schere$

Strikte und nicht-strikte Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen sind bekanntlich binäre Relationen $R \subseteq S \times S$,
wobei zwei Arten unterschieden werden können:

nicht-strikte Ordnungsrelationen sind

- reflexiv,
- antisymmetrisch
- transitiv

strikte Ordnungsrelationen sind

- irreflexiv
- asymmetrisch
- transitiv

Beispiel:
Auf Zahlen (z.B. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$) ist die Ordnungsrelation $\leq$ nicht strikt
und die Ordnungsrelation $<$ strikt.

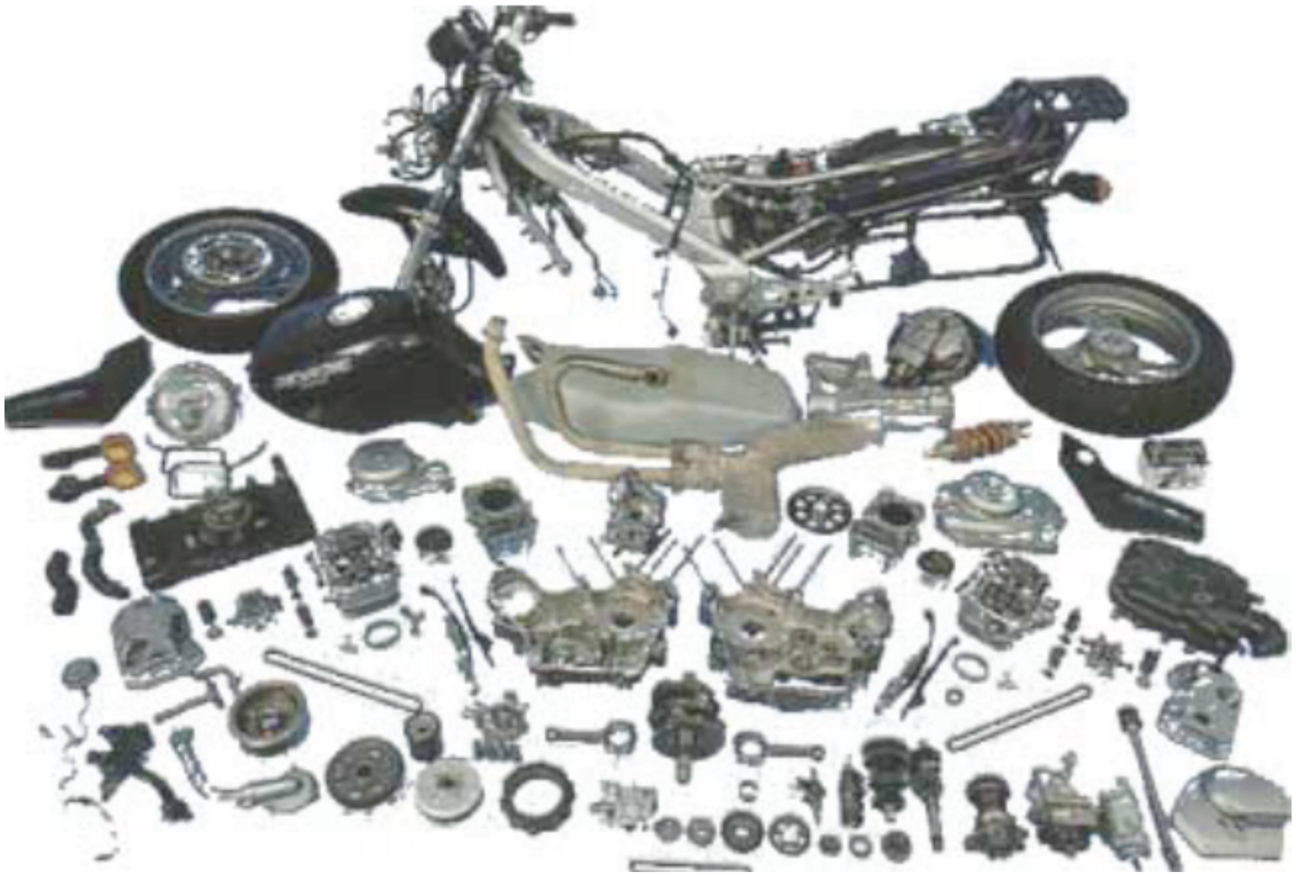
Beispiel einer strikten Ordnungsrelation (1)

FlowsInto,

z.B. *Inn* *<u>FlowsInto</u>* *Donau* , *Mur* *<u>FlowsInto</u>* *Drau* , *Drau* *<u>FlowsInto</u>* *Donau* , ...

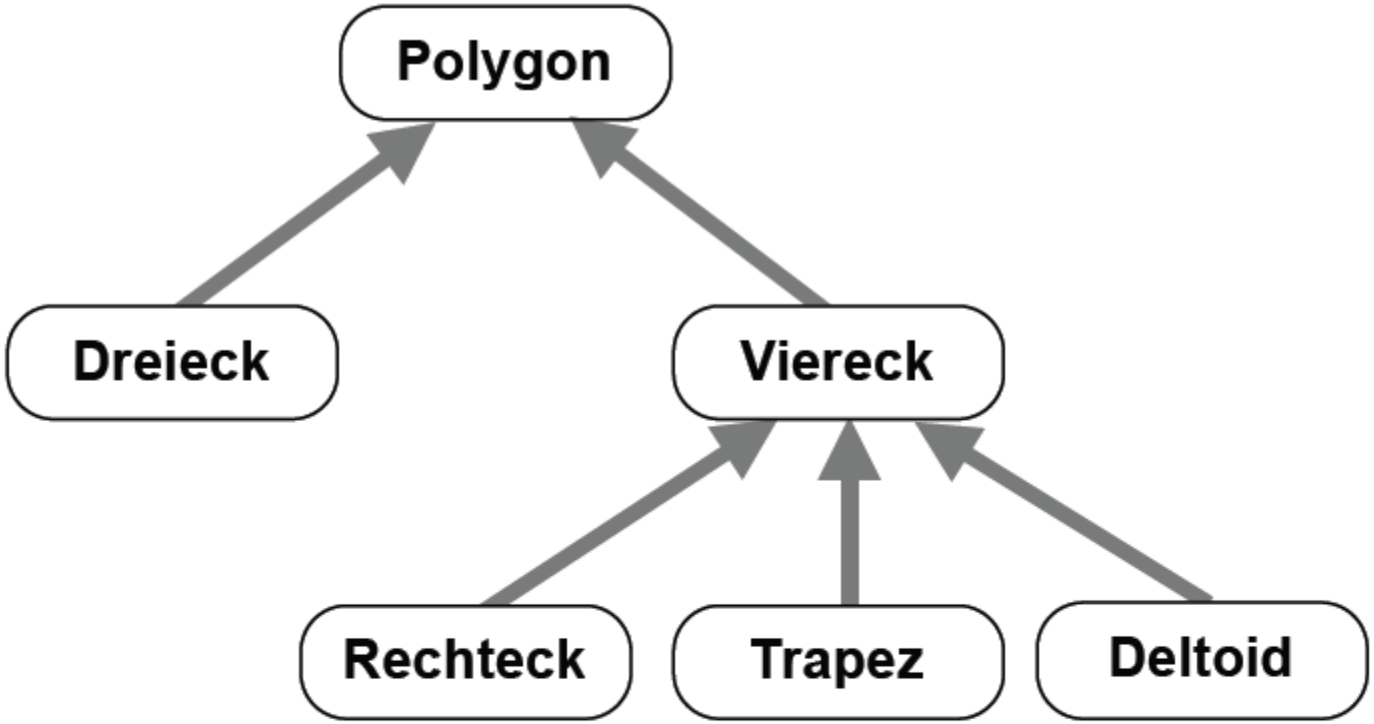
Beispiel einer strikten Ordnungsrelation (2)

PartOf,
(left as an exercise to the reader ☺)



Beispiel einer strikten Ordnungsrelation (3)

IsA,
bzw. Subklassenbildung in objektorientierten Programmiersprachen wie Simula, Smalltalk, C++, Java, ...



Eigenschaften binärer Relationen: Äquivalenzrelationen

Eine **Äquivalenzrelation** ist eine ist eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$, die

- reflexiv,
- symmetrisch und
- transitiv

ist.

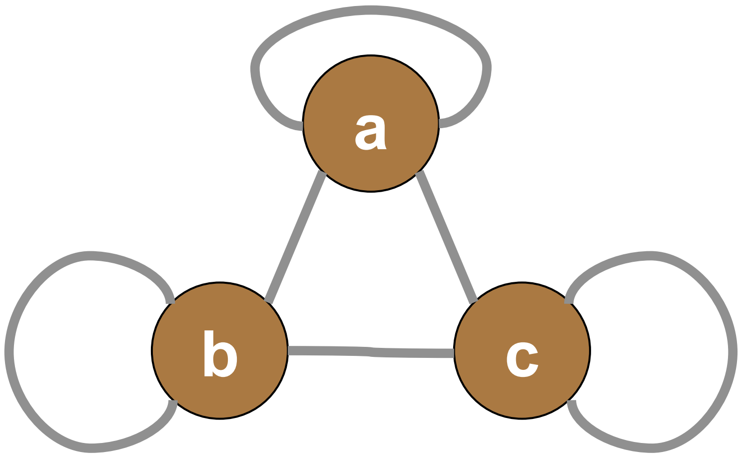
Eine **Äquivalenzklasse** ist eine Menge bestehend aus äquivalenten Elementen („Elemente mit dem gleichen Wert“).

Die von x induzierte Äquivalenzklasse $[x]_R$ ist definiert als alle Elemente $y \in S$, die zu x äquivalent sind:

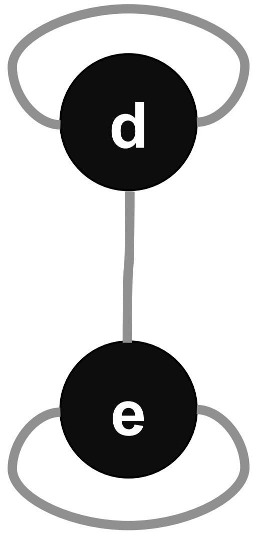
$$[x]_R \;:=\; \{\, y \mid xRy \,\} \quad (\text{ bzw. } \{\, y \mid (x, y) \in R\} \text{ })$$

Beispiel einer Äquivalenzrelation (1)

Same_Haircolor,
z.B. a, b, c gehören zu den Braunhaarigen, d, e zu den Schwarzhaarigen



$$[a]_{Same\_Haircolor} = [b]_{Same\_Haircolor} = [c]_{Same\_Haircolor}$$



$$[d]_{Same\_Haircolor} = [e]_{Same\_Haircolor}$$

Beispiel einer Äquivalenzrelation (2)

Sei $R := \{ (x, y) \mid \exists\, n \in \mathbf{Z}\colon\ (y - x = 5 \cdot n) \}$,

R ist eine Äquivalenzrelation und ergibt die folgenden Äquivalenzklassen:

$[0]_R = \{ 0, 5, 10, 15, \ldots, -5, -10, -15 \}$

$[1]_R = \{ 1, 6, 11, 16, \ldots, -4, -9, -14 \}$

$[2]_R = \{ 2, 7, 12, 17, \ldots, -3, -8, -13 \}$

...

Frage: Wieviele *verschiedene* Äquivalenzklassen gibt es in diesem Beispiel?

Dies sind die sog. Restklassen bei Division durch 5 bzw. Restklassen modulo 5