3 Boole'sche Algebra und Aussagenlogik

3-2 Aussagenlogik

Formale Grundlagen der Informatik I

Herbstsemester 2012

Robert Marti

Vorlesung teilweise basierend auf Unterlagen
von Prof. emer. Helmut Schauer

Aussagenlogik: "Atomare" Aussagen

- Eine **Aussage** ist eine sprachliche Formulierung, der man eindeutig einen Wahrheitswert zuweisen kann.
- **Wahrheitswerte** sind
  - wahr (true), mit **T** (seltener auch mit **W**) oder **1** bezeichnet
  - falsch (false), mit **F** oder **0** bezeichnet
- Beispiele "atomarer" Aussagen:
  - "*Zürich liegt in der Schweiz*" Wahrheitswert **T** bzw. **1**
  - "*Sauerstoff ist ein Metall*" Wahrheitswert **F** bzw. **0**
- Bemerkungen:
  - Natürliche Sprache ist teilweise vage
    und der Wahrheitswert einer Aussage kann z.B. von der Zeit abhängen.
  - **Normalerweise** werden Aussagen formuliert, die vom Autor als wahr betrachtet werden.
  - Ein Satz wie "*Dieser Satz ist falsch*" ist nicht zulässig.

Aussagenlogik: "Zusammengesetzte" Aussagen

- Die **Aussagenlogik** beschäftigt sich damit,
  - wie aus einfachen (atomaren) Aussagen komplexere Aussagen konstruiert werden können und
  - was deren Wahrheitswert ist.

Beispiele:

- "*Zürich liegt in der Schweiz*" **or** "*Zürich liegt in Deutschland*"
- "*Zürich liegt in der Schweiz*" **and** "*Sauerstoff ist ein Metall*"
- **If** "*es regnet*" **and** "*man ist im Freien*" **and** "*man hat keinen Regenschutz*" **then** "*man wird nass*".

Bemerkungen:

- Die erste Aussage verwendet ein logisches oder ($\neq$ umgangssprachliches oder!).
- Die unterste Aussage verwendet eine Implikation, siehe folgende Seite.

Implikation

Wenn a gilt, dann gilt auch b. (If a is true, then b is true.)
[auch: a impliziert (implies) b.]

$a \rightarrow b := \neg a \vee b$

auch: $b \leftarrow a$ ("b falls a" bzw. "b if a")

a heisst **Prämisse**

b heisst **Konklusion**

Beispiel: "*es regnet*" $\rightarrow$ "*Strasse ist nass*"

Wertetabelle

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

bzw.: F = False (0), T = True (1)

a	b	$a \rightarrow b$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Äquivalenz

Genau wenn a gilt, dann gilt auch b -- und nur dann.
Wenn **und nur wenn** a gilt, dann gilt auch b.
(If **and only if** a is true, then b is true.)

$$a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$$

auch: $b \equiv a$

Wertetabelle

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

bzw.: F = False (0), T = True (1)

a	b	$a \leftrightarrow b$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Antivalenz bzw. Exklusives Oder

Genau eine der Aussagen ist richtig, aber nicht beide.

$$a \neq b \;:=\; (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$$

auch: $a \not\leftrightarrow b$, $a \oplus b$

Wertetabelle

a	b	$a \neq b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

bzw.: F = False (0), T = True (1)

a	b	$a \neq b$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Automatisches Beweisen

- Beim automatischen Beweisen (Theorem Proving) werden, ausgehend von einer Menge von Aussagen, “neue”, “unbekannte” (nicht explizit formulierte) Aussagen hergeleitet.
- Im allgemeinen sollen aus “korrekten” Aussagen – will heissen: Aussagen deren Wahrheitswert TRUE ist – mit Hilfe von **Inferenzregeln** andere korrekte Aussagen **abgeleitet** (deduziert) werden.
- Begriffe wie “erfüllbare Formel” und “Tautologie” erleichtern es, über diese Anwendung zu sprechen (→ nächste Folie).
- Die “Standardisierung” von Formeln kann helfen, den Herleitungsprozess zu vereinfachen (→ übernächste Folie).

Erfüllbare Fomeln und Tautologien

- **Erfüllbarkeit**
  Eine aussagenlogische Formel F heisst **erfüllbar**, wenn die darin vorkommenden Variablen (a, b, c, …) so mit Wahrheitswerten belegt werden können, dass die Formel F selber wahr ist.

  Beispiele: $\mathbf{T}$, a, $\neg a$, $a \vee \neg a$, $a \rightarrow b$

- **Tautologie**
  Eine aussagenlogische Formel F heisst **Tautologie**, wenn sie *unabhängig von den Wahrheitswerten der darin vorkommenden Variablen* (a, b, c, …) *immer* wahr ist.

  Beispiele: $\mathbf{T}$, $a \vee \neg a$, $(a \wedge b) \rightarrow (a \vee b)$

- **Satz**
  Eine Formel F ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg F$ keine Tautologie ist.
  Eine Formel G ist genau dann eine Tautologie , wenn $\neg G$ nicht erfüllbar ist.

Disjunktive Normalform

- Eine Formel, die aus einer Disjunktion von Teilformeln besteht, wobei jede dieser Teilformeln eine Konjunktion von Variablen und negierten Variablen ist, ist in **disjunktiver Normalfom** (**DNF**):

  $$(\lambda_{11} \wedge \lambda_{12} \wedge \ldots \wedge \lambda_{1,n1}) \vee (\lambda_{21} \wedge \ldots \wedge \lambda_{2,n2}) \vee \ldots \vee (\lambda_{m,1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{m,nm})$$

  wobei jedes λ_{ij} die Form a oder $\neg a$ hat.
  (λ_{ij} wird als **Literal** bezeichnet.)

- Satz: Zu jeder Formel gibt es eine äquivalente Formel in DNF.

- Transformation einer Formel in DNF

  1. Eliminiere Äquivalenz und Implikation (durch jeweilige Definitionen)
  2. Ziehe Negation „nach innen“
     $\neg(\neg F)$ ersetzen durch F
     $\neg(F \vee G)$ ersetzen durch $\neg F \wedge \neg G$
     $\neg(F \wedge G)$ ersetzen durch $\neg F \vee \neg G$

Disjunktive Normalform

- Die disjunktive Normalform kann auch aus einer gegebenen Wahrheitstabelle hergeleitet werden:

  1. Jede Zeile, für die das Resultat **TRUE** (bzw. 1) ist, ergibt eine Konjunktion ($\wedge$) aller Variablen, wobei
     - Variablen mit Eintrag **FALSE** (bzw. 0) negiert auftreten,
     - Variablen mit Eintrag **TRUE** (bzw. 1) nicht-negiert auftreten.

  2. Alle so erhaltenen Konjunktionen werden durch Disjunktionen ($\vee$) verbunden.

- Beispiel:

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$
\begin{aligned}
F \;=\; & (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \\
\vee\; & (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \\
\vee\; & (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \\
\vee\; & (a \wedge b \wedge \neg c)
\end{aligned}
$$

Konjunktive Normalform

- Eine Formel, die aus einer Konjunktion von Teilformeln besteht, wobei jede dieser Teilformeln eine Disjunktion von Variablen und negierten Variablen ist, ist in **konjunktiver Normalfom** (**KNF**):

  $$(\lambda_{11} \vee \lambda_{12} \vee \ldots \vee \lambda_{1,n1}) \wedge (\lambda_{21} \vee \ldots \vee \lambda_{2,n2}) \wedge \ldots \wedge (\lambda_{m,1} \vee \ldots \vee \lambda_{m,nm})$$

  wobei jedes λ_{ij} die Form a oder $\neg a$ hat.
  (λ_{ij} wird als **Literal** bezeichnet.)

- Satz: Zu jeder Formel gibt es eine äquivalente Formel in KNF.

- Auch die KNF kann aus einer Wahrheitstabelle hergeleitet werden.
  - Betrachte Zeilen mit Resultat FALSE (bzw. 0)
  - Verknüpfe die Variablen mit $\vee$, wobei die Negation der Variablen genau umgekehrt vorgenommen wird als bei DNF.
  - Verknüpfe die Resultate der Zeilen mit $\wedge$.

Inferenzregeln

- Eine **Inferenzregel** ist eine Umformungsregel, die festlegt, welche Formel G aus einer Menge von Formeln $F_1, \ldots, F_n$ abgeleitet werden darf.

Beispiele:

Modus Ponens:

$$\frac{\alpha \;,\; \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Modus Tolens:

$$\frac{\neg\beta \;,\; \alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha}$$

Resolution:

$$\frac{\alpha \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m \quad , \quad \neg\alpha \vee \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n}{\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m \vee \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n}$$

Inferenzregeln

- Ein System von Inferenzregeln sollte (im Prinzip) **korrekt** und **vollständig** sein.
- **Korrekt** heisst: Falls die von der Inferenzregel verwendeten Formeln wahr sind, so sollte auch die abgeleitete Formel wahr sein. Mit anderen Worten: Es werden keine unwahren Formeln abgeleitet.
- **Vollständig** heisst: Es können **alle** wahren Formeln hergeleitet werden.

Beispiel einer inkorrekten Regel:

$$\frac{\beta\ ,\quad \alpha \rightarrow \beta}{\alpha}$$

Beispiel

There are three persons: Stirlitz, Mueller, and Eismann. It is known that exactly one of them is Russian, while the other two are Germans.

Moreover, every Russian must be a spy.

When Stirlitz meets Mueller in a corridor, he makes the following joke: “you know, Mueller, you are as German as I am Russian”. It is known that Stirlitz always says the truth when he is joking.

Establish that Eismann is not a Russian spy.

Beispiel

There are three persons: Stirlitz, Mueller, and Eismann. It is known that exactly one of them is Russian, while the other two are Germans.

$(RS \wedge GM \wedge GE) \vee (GS \wedge RM \wedge GE) \vee (GS \wedge GM \wedge RE).$

Aussagen

RS	Russian Sterlitz
GM	German Mueller
GE	German Eismann

etc.

Moreover, every Russian must be a spy.

When Stirlitz meets Mueller in a corridor, he makes the following joke: "you know, Mueller, you are as German as I am Russian". It is known that Stirlitz always says the truth when he is joking.

Establish that Eismann is not a Russian spy.

Beispiel

There are three persons: Stirlitz, Mueller, and Eismann. It is known that exactly one of them is Russian, while the other two are Germans.

$$(RS \land GM \land GE) \lor (GS \land RM \land GE) \lor (GS \land GM \land RE).$$

Moreover, every Russian must be a spy.

$$(RS \Rightarrow SS) \land (RM \Rightarrow SM) \land (RE \Rightarrow SE).$$

Aussagen

SS Spy Sterlitz

etc.

When Stirlitz meets Mueller in a corridor, he makes the following joke: "you know, Mueller, you are as German as I am Russian". It is known that Stirlitz always says the truth when he is joking.

Establish that Eismann is not a Russian spy.

Beispiel

There are three persons: Stirlitz, Mueller, and Eismann. It is known that exactly one of them is Russian, while the other two are Germans.

$(RS \land GM \land GE) \lor (GS \land RM \land GE) \lor (GS \land GM \land RE).$

Moreover, every Russian must be a spy.

$(RS \Rightarrow SS) \land (RM \Rightarrow SM) \land (RE \Rightarrow SE).$

When Stirlitz meets Mueller in a corridor, he makes the following joke: "you know, Mueller, you are as German as I am Russian". It is known that Stirlitz always says the truth when he is joking.

$RS \Leftrightarrow GM.$

Establish that Eismann is not a Russian spy.

Beispiel

There are three persons: Stirlitz, Mueller, and Eismann. It is known that exactly one of them is Russian, while the other two are Germans.

$(RS \land GM \land GE) \lor (GS \land RM \land GE) \lor (GS \land GM \land RE).$

Moreover, every Russian must be a spy.

$(RS \Rightarrow SS) \land (RM \Rightarrow SM) \land (RE \Rightarrow SE).$

When Stirlitz meets Mueller in a corridor, he makes the following joke: "you know, Mueller, you are as German as I am Russian". It is known that Stirlitz always says the truth when he is joking.

$RS \Leftrightarrow GM.$

Establish that Eismann is not a Russian spy.

$\neg (RE \land SE)$

Beispiel

There are three persons: Stirlitz, Mueller, and Eismann. It is known that exactly one of them is Russian, while the other two are Germans.

$(RS \wedge GM \wedge GE) \vee (GS \wedge RM \wedge GE) \vee (GS \wedge GM \wedge RE).$

$(RS \Leftrightarrow \neg GS) \wedge (RM \Leftrightarrow \neg GM) \wedge (RE \Leftrightarrow \neg GE).$

Zusätzl. Aussage
Niemand kann Russe und Deutscher sein

Moreover, every Russian must be a spy.

$(RS \Rightarrow SS) \wedge (RM \Rightarrow SM) \wedge (RE \Rightarrow SE).$

When Stirlitz meets Mueller in a corridor, he makes the following joke: "you know, Mueller, you are as German as I am Russian". It is known that Stirlitz always says the truth when he is joking.

$RS \Leftrightarrow GM.$

Establish that Eismann is not a Russian spy.

$\neg\,(RE \wedge SE)$

Vergleich

Boole'sche Algebra

Boole'sche Variablen: $a \in \{0, 1\}$

Boole'sche Operatoren: $\neg \ \vee \ \wedge \ \rightarrow \ \leftrightarrow$

Boole'sche Formeln:

- 0, 1
- falls a Formel, dann ist $\neg a$ eine Formel
- Falls a, b Formeln dann sind $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \rightarrow b$ und $a \leftrightarrow b$ Formeln

Aussagenlogik

Atomare Formeln: $p \in \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$

Logische Operatoren: $\neg \ \vee \ \wedge \ \rightarrow \ \leftrightarrow$

Aussagenlogische Formeln:

- F, T
- falls p Formel, dann ist $\neg p$ eine Formel
- Falls p, q Formeln dann sind $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$ und $p \leftrightarrow q$ Formeln