3 Quantoren

In diesem Kapitel erfolgt eine erste Einführung in die Quantoren der Prädikatenlogik. Das hier vorgestellte *Konzept von freien und gebundenen Variablen* ist auch für viele weitere Gebiete der theoretischen Informatik und der Programmierung von Bedeutung.

3.1 Elementare Definitionen

60 Bemerkung EIGENSCHAFTEN UND AUSSAGEN
Wir erinnern an die Unterschiede zwischen Eigenschaften und Aussagen: *Aussagen (propositions)* sind wahr oder falsch, *Eigenschaften (Prädikate, properties, predicates)* sind Kollektionen von Aussagen über einer Menge von Objekten. Sie können wahr oder falsch sein *abhängig* von dem konkret betrachteten Objekt. So ist etwa "rot sein" eine Eigenschaft über einer Menge von Autos und somit eine Kollektion von Einzelaussagen über Autos. Ist P eine Eigenschaft über einer Menge M von Objekten, so ist für jedes konkrete Objekt $m \in M$ dann $P(m)$ eine Aussage, also wahr oder falsch. Oft benötigt man Variable als Platzhalter, wenn man Eigenschaften angeben will, etwa in $P(x) \Leftrightarrow ((x = 3) \wedge (x \geq 5))$.

61 Definition QUANTOREN ÜBER EIGENSCHAFTEN IN EINER VARIABLEN
Sei M eine Menge und $P : M \to \{W, F\}$ eine Eigenschaft in einer Variablen.

Die *Allquantifizierung (universal quantification)* von P bezüglich seiner Variablen wird als $\forall m : P(m)$ geschrieben. Die Allquantifizierung ist eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $P(m)$ eben *für alle* Werte $m \in M$ wahr ist.

Die *Existenzquantifizierung (existential quantification)* von P bezüglich seiner Variablen wird als $\exists m : P(m)$ geschrieben. Die Existenzquantifizierung ist eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn es (mindestens) einen Wert $m \in M$ gibt, für den $P(m)$ wahr ist.

Bei komplexeren Formeln muß geklammert werden. $\forall m : (P(m) \wedge Q(m))$ ist etwas anderes als $(\forall m : P(m)) \wedge Q(m)$. In der ersten Formel hat m überall die Rolle eines

Platzhalters, in der zweiten Formel wird m als Platzhalter benutzt, aber auch als Variable ausserhalb des Einflußbereichs, bei der wir an ein konkret einzusetzendes Objekt zu denken haben. Fehlt die Klammerung, wie etwa in $\forall m : P(m) \wedge Q(m)$ so ist diese Formel per Konvention mit Klammern als $\forall m : (P(m) \wedge Q(m))$ zu lesen.

62 Beispiel Quantifizierung
Sei M die Menge der Leser dieses Buches. P sei die Eigenschaft, Student zu sein. $\forall m : P(m)$ ist eine Aussage. Sie ist falsch, da wohl nicht alle Leser dieses Buches Studenten sind. $\exists m : P(m)$ ist ebenfalls eine Aussage. Sie ist wahr, da dieses Buch von mindestens einem Studenten gelesen wird.

3.2 Bereichsangaben

63 Definition Quantoren mit und ohne Bereichsangaben
$\forall m \in M : P(m)$ ist ein Quantor mit *Bereichsangabe (domain)*. $\forall m : P(m)$ ist ein Quantor ohne Bereichsangabe. Oft läßt man die Bereichsangabe auch weg, wenn diese vom Kontext her klar ist.

Quantoren mit Bereichsangaben lassen sich auf Quantoren ohne Bereichsangaben zurückführen. Beim Allquantor ist $\forall m \in M : P(m)$ oder auch $\forall m, m \in M : P(m)$ äquivalent zu $\forall m : (m \in M \Rightarrow P(m))$. Das bedeutet, daß für alle m, die es im gesamten betrachteten Universum gibt, die folgende Aussage gilt: *Sofern* $m \in M$ ist, *folgt daraus* $P(m)$. Über jene Elemente m unseres Universums, die nicht in der Menge M liegen, wird nichts gefordert. Beim Existenzquantor ist $\exists m \in M : P(m)$ oder auch $\exists m, m \in M : P(m)$ äquivalent zu $\exists m : (m \in M \wedge P(m))$. Das bedeutet, daß es ein m im Universum gibt, das *sowohl* in M liegt *als auch* $P(m)$ erfüllt. Insbesondere wird dadurch auch behauptet, daß es überhaupt Elemente in M gibt.

Die Bereichsangabe kann auch durch eine Eigenschaft gebildet werden, wie etwa in $\forall x, x > 0 : x^2 > 0$. Hier gilt eine entsprechende Interpretation, denn jeder[1] Eigenschaft entspricht eine Menge. Es ist $\forall m, Q(m) : P(m)$ äquivalent zu $\forall m : (Q(m) \Rightarrow P(m))$ und $\exists m, Q(m) : P(m)$ ist äquivalent zu $\exists m : (Q(m) \wedge P(m))$.

Bei korrekter, intuitiver Lesart der Quantoren werden Bereichsangaben unmittelbar klar: Lies etwa $\forall m, Q(m) : P(m)$ als *für alle m, für die Q gilt, gilt auch P* und $\exists m, Q(m) : P(m)$ als *es gibt ein m, für das Q gilt und auch P.*

[1] Die früher erwähnte Problematik mit dem Komprehensionsaxiom wollen wir hier einmal vernachlässigen!

64 Bemerkung QUANTOREN MIT LEEREN BEREICHSANGABEN
Sind die Bereichsangaben der Quantoren leere Mengen, so ergeben sich spezielle Situationen: Sei also $M = \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine beliebige Aussage. Dann ist $\forall m \in \emptyset : \mathcal{A}$ *wahr* und $\exists m \in \emptyset : \mathcal{A}$ ist *falsch*, gleichgültig, was $\mathcal{A}$ ist.

Beim Allquantor $\forall m \in \emptyset : P(m)$ wird behauptet, daß für alle Elemente m etwas gilt. Nun gibt es aber kein m. Es ist also für gar kein m etwas zu zeigen. Die Gesamtaussage ist also wahr. $\forall m \in \emptyset : F$, $\forall m \in \emptyset : (B \wedge \neg B)$, $\forall m \in \emptyset : (2 = 3)$ sind also alle wahr. Formal wird das so klar: $\forall m \in \emptyset : P(m)$ ist äquivalent zu $\forall m : (m \in \emptyset \Rightarrow P(m))$. Nun ist aber $m \in \emptyset$ immer falsch. Es gilt aber stets $F \Rightarrow P(m)$, egal was $P(m)$ ist. $(m \in \emptyset \Rightarrow P(m))$ ist also W, wir haben somit $\forall m : W$ ohne Bereichsangabe. Und das ist wahr. Beim Existenzquantor kann man sich das analog überlegen.

Ohne Bereichsangabe ist eine allquantifizierte Aussage stärker[2] als eine existenzquantifizierte Aussage. Genauer: $(\forall m : P(m)) \Rightarrow (\exists m : P(m))$. Bei gleicher Bereichsangabe ist eine allquantifizierte Aussage stärker als eine existenzquantifizierte Aussage, sofern der Bereich nicht leer ist: Ist also M nicht leer, dann gilt $(\forall m \in M : P(m)) \Rightarrow (\exists m \in M : P(m))$. Gibt es Elemente m für die $Q(m)$ gilt, ist also $\exists m : Q(m)$ wahr, dann gilt $(\forall m, Q(m) : P(m)) \Rightarrow (\exists m, Q(m) : P(m))$.

65 Bemerkung QUANTOREN MIT ENDLICHEN BEREICHSANGABEN
Weitere Spezialfälle ergeben sich, wenn die Bereiche endliche Mengen sind. Sei also $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ und $A : M \to \{W, F\}$ eine Eigenschaft. Dann entspricht dem Allquantor die Konjunktion und dem Existenzquantor die Disjunktion:

$$[\forall m \in M : A(m)] \Leftrightarrow [A(m_1) \wedge A(m_2) \wedge \ldots \wedge A(m_n)]$$

$$[\exists m \in M : A(m)] \Leftrightarrow [A(m_1) \vee A(m_2) \vee \ldots \vee A(m_n)]$$

Da bei unendlichen Mengen diese Umformung nicht mehr möglich ist, benötigt man Quantoren. Allquantor $\forall$ und Existenzquantor $\exists$ werden wegen dieses Zusammenhangs oft auch $\wedge$ respektive $\vee$ geschrieben.

3.3 Mehrstellige Eigenschaften

66 Beispiel MEHRSTELLIGE EIGENSCHAFTEN UND QUANTOREN
Sei X die Menge der Personen in einem Raum und Y die Menge der Mäntel, die in einer Garderobe hängen. Sei P die Eigenschaft des Gefallens: $P(x, y)$ ist genau dann

[2] In dem früher erwähnten Sinn, daß eine stärkere Aussage eine schwächere impliziert.

wahr, wenn der Mantel y der Person x gefällt. P heißt eine *zweistellige* Eigenschaft, im Gegensatz zu den bisher betrachteten Eigenschaften, die alle einstellig waren.

$\forall x \in X : P(x, y)$ ist eine einstellige Eigenschaft, die von der Wahl des Mantels y abhängt. Schreiben wir $Q(y) := \forall x \in X : P(x, y)$, so wird dadurch eine einstellige Eigenschaft für Mäntel definiert. Für einen bestimmten Mantel y ist $Q(y)$, also $\forall x \in X : P(x, y)$, genau dann wahr, wenn dieser Mantel allen Personen in diesem Raum gefällt.

$\exists x \in X : P(x, y)$ ist eine einstellige Eigenschaft, die von der Wahl des Mantels y abhängt. Schreiben wir $R(y) := \exists x \in X : P(x, y)$, so wird dadurch eine einstellige Eigenschaft für Mäntel definiert. Für einen bestimmten Mantel y ist $R(y)$, also $\exists x \in X : P(x, y)$, genau dann wahr, wenn es (mindestens) eine Person in diesem Raum gibt, welcher der Mantel y gefällt.

67 Definition QUANTIFIZIEREN MEHRSTELLIGER EIGENSCHAFTEN
Mehrstellige Eigenschaften können also auch quantifiziert werden. Ein Quantor vermindert dabei die Stelligkeit der Eigenschaft um eins, wenn die quantisierte Variable in der Eigenschaft auftaucht: Ist $P : M_1 \times M_2 \to \{T, F\}$ eine zweistellige Eigenschaft, dann ist die Allquantifizierung $\forall x \in M_1 : P(x, y)$ eine einstellige Eigenschaft, nämlich im nicht quantifizierten y. $\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : P(x, y)$ ist eine nullstellige Eigenschaft, also eine Aussage. Werden Eigenschaften über Variablen quantifiziert, die nicht syntaktisch in ihnen auftauchen, dann bleibt die Stelligkeit erhalten: $\forall z \in A : P(x, y)$.

68 Bemerkung SCHACHTELUNGEN VON QUANTOREN
Es sind mehrfache Verschachtelungen von Quantoren möglich. Es kommt hier auf die *genaue Reihenfolge der Quantoren und der Variablen* an. Für zweistellige Eigenschaften beispielsweise erhält man folgende acht Kombinationen:

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in X : \forall y \in Y : P(x, y) & \forall x \in X : \exists y \in Y : P(x, y) \\
\exists x \in X : \forall y \in Y : P(x, y) & \exists x \in X : \exists y \in Y : P(x, y) \\
\forall y \in Y : \forall x \in X : P(x, y) & \forall y \in Y : \exists x \in X : P(x, y) \\
\exists y \in Y : \forall x \in X : P(x, y) & \exists y \in Y : \exists x \in X : P(x, y)
\end{array}$$

Manche dieser Kombinationen sind allerdings gleich, und zwar:

(1) Je zwei aufeinanderfolgende Allquantoren dürfen vertauscht werden, denn es ergibt sich eine äquivalente Aussage:

$$(\forall x \in X : \forall y \in Y : P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in Y : \forall x \in X : P(x, y))$$

(2) Je zwei aufeinander folgende Existenzquantoren dürfen vertauscht werden, denn es ergibt sich eine äquivalente Aussage:

$$(\exists x \in X : \exists y \in Y : P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y \in Y : \exists x \in X : P(x,y))$$

(3) Existenz- und Allquantoren dürfen im allgemeinen nicht vertauscht werden. Es gilt zwar:

$$(\exists x \in X : \forall y \in Y : P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in Y : \exists x \in X : P(x,y))$$

Aber es gilt nicht:

$$(\forall y \in Y : \exists x \in X : P(x,y)) \Rightarrow (\exists x \in X : \forall y \in Y : P(x,y))$$

Man sieht das am besten an einem natürlichsprachlichen Beispiel ein:

Annahme: "Es gibt eine Programmiersprache x, so daß für alle Informatiker y gilt: y beherrscht x." So ein x ist also eine Art allseits beliebte Programmiersprache. Dann *folgt* daraus sicherlich auch: "Für jeden Informatiker y gibt es eine Programmiersprache x, so daß y dann x beherrscht."

Nehmen wir nun aber an: "Für jeden Informatiker y gibt es eine Programmiersprache x, so daß y dann x beherrscht." Dann kann das aber für den einen Informatiker LISP sein, für den anderen SML und für den nächsten COBOL. Es gilt also offenbar *nicht*: "Es gibt *eine* Programmiersprache x, so daß für alle Informatiker y gilt: y beherrscht x."

Auch bei Verschachtelung von Quantoren sollte immer geklammert werden. Stehen keine Klammern, wie etwa in $\forall x : \exists y : \forall z : Q(x) \wedge P(y,z)$ so ist darunter die folgende Klammerung zu verstehen: $(\forall x : (\exists y : (\forall z : (Q(x) \wedge P(y,z)))))$

69 Beispiel VERTAUSCHEN VON QUANTOREN
Welche der Formeln $\forall x \in \mathrm{N} : \exists y \in \mathrm{N} : y > x$ und $\exists x \in \mathrm{N} : \forall y \in \mathrm{N} : y > x$ sind wahr, welche falsch? Interpretieren Sie das Resultat im Sinne der Aussage: "Allquantor und Existenzquantor dürfen nicht immer beliebig vertauscht werden."

70 Satz NEGATION VON QUANTOREN
Negationen von Quantoren werden folgendermaßen gebildet:

$$\neg(\forall x : \mathcal{A}) = \exists x : \neg\mathcal{A} \qquad \neg(\exists x : \mathcal{A}) = \forall x : \neg\mathcal{A}$$

Dies gilt auch für Quantoren mit Bereichsangaben:

$$\neg(\forall x, \mathcal{B} : \mathcal{A}) = \exists x, \mathcal{B} : \neg\mathcal{A} \qquad \neg(\exists x, \mathcal{B} : \mathcal{A}) = \forall x, \mathcal{B} : \neg\mathcal{A}$$

3.4 Freie und gebundene Variable

Die Gültigkeit einer Formel wird vermutlich von den Belegungen der Variablen abhängen, die in der Formel auftauchen. So ist etwa die einstellige Eigenschaft $(x = 3)$ in der Variablen x wahr, wenn eben x gleich 3 ist, und falsch in den anderen Fällen.

Die Gültigkeit von Formeln muß nicht unbedingt von ihren Variablen abhängen. $(x = 3) \vee \neg(x = 3)$ etwa ist wahr, ganz gleich, was x ist.

Die Gültigkeit von Formeln wird wohl nicht von Variablen abhängen, die in der Formel durch *einen Quantor gebunden werden*, da diese Variablen ja ausschließlich zum Ausdruck der Quantifizierung dienen. Wir vermuten richtig, daß die Formeln $\forall x : x^2 \geq 0$, $\forall y : y^2 \geq 0$ und $\forall z : z^2 \geq 0$ allesamt dasselbe besagen und insbesondere wahr sind, sofern wir uns im Bereich der reellen Zahlen aufhalten. Wir vermuten somit, daß Variablen hinter Quantoren beliebig umbenannt werden dürfen. Das ist leider nur teilweise richtig: Wenn eine Variable an einer Stelle einer Formel im Einflußbereich eines Quantors liegt und an einer anderen Stelle nicht, dann können Probleme auftreten. Ein Beispiel ist $(\forall x : x^2 \geq 0) \wedge (x = 3)$. Der Wahrheitswert dieser Formel hängt sehr wohl vom Wert von x ab, im zweiten Teil der Konjunktion taucht x auf und zwar nicht nur als Platzhalter wie im ersten Teil der Konjunktion. Dieses erste x ist an den Allquantor gebunden und hat mit dem letzten, freien x gar nichts zu tun. Hier dürfen wir also nur das erste, gebundene x ersetzen: Die Formeln $(\forall x : x^2 \geq 0) \wedge (x = 3)$, $(\forall y : y^2 \geq 0) \wedge (x = 3)$ und $(\forall z : z^2 \geq 0) \wedge (x = 3)$ sind alle äquivalent. Die Formeln $(\forall x : x^2 \geq 0) \wedge (x = 3)$, $(\forall y : y^2 \geq 0) \wedge (y = 3)$ $(\forall z : z^2 \geq 0) \wedge (z = 3)$ jedoch sind alle unterschiedlich. Der Wahrheitswert der ersten hängt von x ab, der zweiten von y und der dritten von z.

Leider ist es noch etwas problematischer. Ersetzt man in $\forall x : (\forall x : (x^2 \geq 0))$ das erste x durch y, so wird daraus die äquivalente Formel $\forall y : (\forall x : (x^2 \geq 0))$. Ersetzt man in $\forall x : (\forall x : (x^2 \geq 0))$ hingegen das zweite x durch y, so wird daraus die äquivalente Formel $\forall x : (\forall y : (y^2 \geq 0))$.

71 Definition FREIE UND GEBUNDENE VARIABLE
Eine Variable, etwa x, kann in einem logischen Ausdruck an mehreren Stellen auftreten. Ein solches *Auftreten (Vorkommen, occurrence)* einer Variablen heißt *quantifiziert (quantified)*, wenn die Variable unmittelbar hinter einem Quantor steht, *gebunden (bound)*, wenn sie im Einflußbereich eines sie selber betreffenden Quantors steht und *frei (free)* in den verbleibenden Fällen. Der *Einflußbereich* eines Quantors ist jene Teilformel, die nach dem : steht und auf die sich der ganze Quantor bezieht.

Im Gegensatz zu einem spezifischen Auftreten einer Variablen heißt eine *Variable* selber in einem logischen Ausdruck *frei*, wenn es in diesem logischen Ausdruck ein freies Auftreten dieser Variablen gibt. Eine *Variable* selber heißt in einem logischen Ausdruck *gebunden*, wenn es in diesem logischen Ausdruck ein gebundenes oder ein quantifiziertes Auftreten dieser Variablen gibt.

Wenn ein und dieselbe Variable in einem Ausdruck mehrmals von einem Quantor quantifiziert wird, muß man zusätzlich noch lokale Gültigkeitsbereiche betrachten. Zu jedem gebundenen Auftreten einer Variablen gehört ein *lokaler Gültigkeitsbereich (scope)*. Dieser enthält alle Vorkommen dieser Variablen, außer denen in einem darin eingeschlossenen Einflußbereich, durch den dieselbe Variable nochmals quantifiziert wird.

72 Beispiel FREIE UND GEBUNDENE VARIABLE
$x = y$ hat gar keinen Quantor. 1.[3] x frei, x als Variable frei. 1. y frei, y als Variable frei.

$\forall x : (x = y)$. Einflußbereich: $(x = y)$. 1. x quantifiziert, 2. x gebunden, x als Variable gebunden. 1. y frei, y als Variable frei.

$(\forall x : (x = y)) \wedge (x = z)$. Einflußbereich: $(x = y)$. 1. x quantifiziert, 2. x gebunden, 3. x frei, x als Variable gebunden und frei. 1. y frei, y als Variable frei. 1. z frei, z als Variable frei.

$(\exists x : ((x = y) \wedge (x = z))$. Einflußbereich: $((x = y) \wedge (x = z))$. 1. x quantifiziert, 2. x gebunden, 3. x gebunden, x als Variable gebunden. 1. y frei, y als Variable frei. 1. z frei, z als Variable frei.

$\exists z : (\exists x : ((x = y) \wedge (x = z)))$. 1. Einflußbereich $(\exists x : ((x = y) \wedge (x = z)))$, 2. Einflußbereich $((x = y) \wedge (x = z))$. 1. x quantifiziert, 2. x gebunden, 3. x gebunden, x als Variable gebunden. 1. y frei, y als Variable frei. 1. z quantifiziert, 2. z gebunden, z als Variable gebunden.

$\forall x : (\exists x : (x = y))$. 1. Einflußbereich $(\exists x : (x = y))$, 2. Einflußbereich $(x = y)$. 1. x quantifiziert, 2. x quantifiziert, 3. x gebunden, x als Variable gebunden. 1. y frei, y als Variable frei. x wird zweimal quantifiziert, wir müssen also noch lokale Gültigkeitsbereiche für jedes gebundene Auftauchen von x untersuchen: Zum einzigen gebundenen Auftauchen von x, das ist das 3. x überhaupt, ist der am nächsten liegende Quantor, der x quantifiziert, der 2. Quantor, der $\exists x$. Der lokale Gültigkeitsbereich dieses gebundenen Auftauchens von x ist somit das 2. und 3. Auftauchen von x.

[3] Lies: Das erste Auftreten von x ist frei.

$\forall x : (\exists y : (\forall x : (x = y)))$. 1. Einflußbereich $(\exists y : (\forall x : (x = y)))$, 2. Einflußbereich $(\forall x : (x = y))$, 3. Einflußbereich $(x = y)$. 1. x quantifiziert, 2. x quantifiziert, 3. x gebunden, x als Variable gebunden. 1. y quantifiziert, 2. y gebunden, y als Variable gebunden. x wird zweimal quantifiziert, wir müssen also noch lokale Gültigkeitsbereiche für jedes gebundene Auftauchen von x untersuchen: Zum einzigen gebundenen Auftauchen von x, das ist das 3. x überhaupt, ist der am nächsten liegende Quantor, der x quantifiziert, ist der 3. Quantor, der $\forall x$. Sein Einflußbereich ist $(x = y)$, also ist das 2. und 3. Auftauchen von x der lokale Gültigkeitsbereich dieses gebundenen Auftauchens von x.

$\forall x : (\exists y : (\forall x : (\exists z : (x = y))))$. 1. Einflußbereich $(\exists y : (\forall x : (\exists z : (x = y))))$, 2. Einflußbereich $(\forall x : (\exists z : (x = y)))$, 3. Einflußbereich $(\exists z : (x = y))$, 4. Einflußbereich $(x = y)$. 1. x quantifiziert, 2. x quantifiziert, 3. x gebunden, x als Variable gebunden. 1. y quantifiziert, 2. y gebunden, y als Variable gebunden. 1. z quantifiziert, z als Variable gebunden. x wird zweimal quantifiziert, wir müssen also noch lokale Gültigkeitsbereiche für jedes gebundene Auftauchen von x untersuchen: Zum einzigen gebundenen Auftauchen von x, das ist das 3. x überhaupt, ist der am nächsten liegende Quantor, der x quantifiziert, der 3. Quantor, der $\forall x$. Sein Einflußbereich ist $(\exists z : (x = y))$, also ist das 2. und 3. Auftauchen von x der lokale Gültigkeitsbereich dieses gebundenen Auftauchens von x.

$(\exists x : (\exists x : (x = y))) \wedge (x = z)$. 1. Einflußbereich $(\exists x : (x = y))$, 2. Einflußbereich $(x = y)$. 1. x quantifiziert, 2. x quantifiziert, 3. x gebunden, 4. x frei, x als Variable gebunden und frei. 1. y frei, y als Variable frei. 1. z frei, z als Variable frei. x wird zweimal quantifiziert, wir müssen also noch lokale Gültigkeitsbereiche für jedes gebundene Auftauchen von x untersuchen. Nur das 3. Auftauchen von x ist gebunden. Der am nächsten liegende Quantor, der x quantifiziert, ist der 2. Quantor, der $\exists x$. Sein Einflußbereich ist $(x = y)$, also ist das 2. und 3. Auftauchen von x der lokale Gültigkeitsbereich dieses gebundenen Auftauchens von x.

Zum Schluß ein Beispiel mit einer in einem inneren Quantor versteckten Variablen: $\forall x : ((x = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$. 1. Einflußbereich $((x = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$, 2. Einflußbereich $(x = 4)$. 1. x quantifiziert, 2. x gebunden, 3. x quantifiziert, 4. x gebunden, x ist als Variable gebunden. x wird zweimal quantifiziert, wir müssen also noch lokale Gültigkeitsbereiche für jedes gebundene Auftauchen von x untersuchen: Das 2. Auftauchen von x ist gebunden. Der am nächsten liegende Quantor, der x quantifiziert, ist der 1. Quantor, der $\forall x$. Sein Einflußbereich ist dann $((x = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$. Der lokale Gültigkeitsbereich des 2. Auftauchens von x ist aber nur das 1. und 2. Auftauchen von x, da das 3. und 4. Auftauchen vom 2. Quantor $\exists x$ versteckt wird. Das 4. Auftauchen von x ist gebunden. Der am nächsten liegende Quantor, der x selber quantifiziert, ist der 2. Quantor, nämlich der $\exists x$. Der lokale Gültigkeitsbereich des 4. Auftauchens von x ist somit das 3. und

4. Auftauchen von x.

73 Definition OFFENE UND GESCHLOSSENE FORMELN
Eine logische Formel heißt *offen (open)*, wenn sie (mindestens) eine freie Variable enthält. Sie heißt *geschlossen (closed)*, wenn sie keine freie Variable enthält, also gar keine Variable oder nur gebundene Variable:

$x = y$	Offen, da x und y frei
$\forall x : (x = y)$	Offen, da y frei
$(\forall x : (x = y)) \wedge (x = z)$	Offen, da y und z frei
$(\exists x : ((x = y) \wedge (x = z))$	Offen, da y und z frei
$\exists z : (\exists x : ((x = y) \wedge (x = z)))$	Offen, da y frei
$\forall x : (\exists x : (x = y))$	Offen, da y frei
$\forall x : (\exists y : (\forall x : (x = y)))$	Geschlossen
$\forall x : (\exists y : (\forall x : (\exists z : (x = y))))$	Geschlossen
$(\exists x : (\exists x : (x = y))) \wedge (x = z)$	Offen, da y und z frei

74 Bemerkung WAHRHEIT QUANTIFIZIERTER FORMELN
Quantifizieren reduziert die Anzahl von Variablen von denen der "Wahrheitswert der Formel abhängen könnte". Allgemein kann die Gültigkeit von Formeln nur von in der Formel auftretenden freien Variablen abhängen. Die Gültigkeit von Formeln kann sicherlich nicht von Variablen abhängen, die in der Formel nur gebunden auftauchen. Gebundenes Auftauchen von Variablen hat ausschließlich Platzhalterfunktion. Geschlossene Formeln sind Aussagen. Sie enthalten keine freien Variablen, deren Laune einen Einfluß auf den Wahrheitswert nehmen kann.

75 Bemerkung UMBENENNEN GEBUNDENER VARIABLE
Es gilt folgende Konversionsregel: Taucht eine Variable in einem logischen Ausdruck durch einen Quantor quantifiziert auf, so entsteht ein äquivalenter logischer Ausdruck, wenn man ein bestimmtes quantifiziertes Auftauchen und jedes gebundene Auftauchen im dazugehörigen lokalen Gültigkeitsbereich durch eine beliebige andere Variable ersetzt, die im Einflußbereich noch nicht frei auftaucht.

Bei einem Quantor mit Bereichsangabe zählt die Bereichsangabe mit zum Einflußbereich, da sie ja auch auf eine entsprechende bereichsfreie Form umgeschrieben werden kann. Am besten schreibt man solche Quantoren bereichsfrei um.

Die Umformung von Termen durch Umbenennen gebundener Variablen heißt im λ–Kalkül, dem wichtigsten Kalkül formaler Ersetzung überhaupt, Alpha Konversion und zählt dort zu den wenigen aber zentralen Regeln. Freie Variable haben keine Platzhalterfunktion sondern eine außerhalb des betrachteten Terms in einer Art äusseren Kontext definierte Bedeutung. Deshalb dürfen sie nicht umbenannt werden.

Ferner darf, wie in der Konversionsregel bereits erfasst ist, ein Auftauchen, das nur Platzhalterfunktion hat, durch Umbenennen nicht zu einem freien Auftauchen werden.

Ausdruck	**Umbenannt und äquivalent**
$\forall x : x^2 \geq 0$	$\forall u : u^2 \geq 0$
$\forall x : (\exists y : (\forall x : (\exists z : (x = y))))$	$\forall u : (\exists y : (\forall x : (\exists z : (x = y))))$
$\forall x : (\exists y : (\forall x : (\exists z : (x = y))))$	$\forall x : (\exists y : (\forall u : (\exists z : (u = y))))$
$\forall x : ((x = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$	$\forall u : ((u = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$
$\forall x : ((x = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$	$\forall x : ((x = 3) \wedge (\exists u : (u = 4)))$
$\forall x : ((x = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$	$\forall u : ((u = 3) \wedge (\exists v : (v = 4)))$
$\forall x : ((x = 3) \wedge (\exists x : (x = 4)))$	$\forall u : ((u = 3) \wedge (\exists u : (u = 4)))$

76 Bemerkung GEMISCHTE VERWENDUNG
Bei Verschachtelung von Quantoren macht vor allem die gleichzeitige Verwendung ein und derselben Variablen für gebundenes und freies Auftreten, sowie die mehrfache Quantifizierung einer Variablen Probleme, da sie zwar logisch korrekt sein kann, den Leser aber meist verwirrt. Das Problem kann durch geeignete Wahl von Variablen zumeist leicht umgangen werden. Statt $(\forall x : x = y) \wedge (x = z)$ sollte man also besser $(\forall u : u = y) \wedge (x = z)$ schreiben.

77 Bemerkung GEBUNDENE VARIABLE UND PARAMETER HIDING
Die Verwendung gebundener und freier Variablen in der Logik entspricht der Problematik lokaler und globaler Variablen in einer blockstrukturierten Programmiersprache wie etwa Pascal, Algol oder C. Auch dort können die formalen Parameter in einer Prozedurdeklaration oder einer Funktionsdeklaration beliebig durch andere ersetzt werden, da sie nur Platzhalterfunktion haben. Bei Umbenennung der Variablen in der Deklaration müssen dann aber alle Referenzen auf diese Variable im lokalen Gültigkeitsbereich der Variablen umbenannt werden, aber eben nur diese, denn im aufrufenden Programm kann diese Variable ja auch benutzt worden sein. Wird eine Variable im aufrufenden Programm benutzt und gleichzeitig auch in der Deklaration einer Prozedur, die in diesem aufrufenden Programm enthalten ist, dann wird die Variable aus dem aufrufenden Programm quasi vor dem Unterprogramm versteckt. Die Variable im Unterprogramm und im aufrufenden Programm haben dann nur den Namen miteinander gemeinsam, nicht aber Typ oder Wert. In den Programmiersprachen spricht man in diesem Fall von *Parameter Hiding*. Man kann dann bei einer Variablen weder den Typ noch den Wert angeben, ohne sich genau die Blockstruktur des gesamten Programms anzusehen. Da dies leicht zu Verwirrungen und weiteren, recht tiefliegenden theoretischen Problemen führt, sollte man als Programmierer Parameter Hiding vermeiden und jeweils neue Variablennamen benutzen. Es wurden deshalb sogar Formalismen eingeführt, die solche Probleme

prinzipiell vermeiden. Diesen Vorteil erkauft man sich dann allerdings mit komplexeren Umformungsregeln in diesen Formalismen.

78 Definition DER EINDEUTIGE EXISTENZQUANTOR
Will man ausdrücken, daß es *genau ein* Element m gibt, für welches das Prädikat P wahr ist, so bedeutet das:

(1) Es gibt ein Element m, für welches das Prädikat wahr ist: $\exists m : P(m)$.

(2) Gibt es zwei Elemente m_1 und m_2, für welche das Prädikat wahr ist, dann sind diese zwei Elemente gleich: $(P(m_1) \wedge P(m_2)) \Rightarrow (m_1 = m_2)$.

Da solche Aussagen häufig gebraucht werden, führt man hierfür einen eigenen Quantor ein, den *eindeutigen Existenzquantor* $\exists_1$ oder auch $\exists!$ Lies $\exists_1 m : P(m)$ als *es gibt genau ein m, für das P(m) gilt.* Wird in der Mathematik die Phrase *es gibt ein* benutzt, so meint man damit eigentlich *es gibt mindestens ein.* Die Möglichkeit, daß mehrere Objekte existieren, wird erst durch die Wendung *es gibt genau ein* ausgeschlossen. Auch der eindeutige Existenzquantor kann mit Bereichsangabe stehen: $\exists_1 m \in M : P(m)$.

79 Bemerkung VARIABLE IN PRÄDIKATEN
In obigen Beispielen haben wir immer $\forall m : P(m)$ geschrieben. Im Ausdruck nach dem Quantor war stets das m enthalten. Dies diente vor allem dem einführenden Verständnis und ist im allgemeinen nicht nötig. Ebenso gilt das für die Bereichsangaben. Man kann also auch $\forall m : \mathcal{A}$ und $\forall m, \mathcal{B} : \mathcal{A}$ schreiben, wobei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beliebige Ausdrücke der Prädikatenlogik sein dürfen. Man beachte in diesem Zusammenhang, daß das Auftauchen einer Variable in einer Aussage eine rein syntaktische Angelegenheit sein kann, die zwar den Wahrheitswert einer Aussage beeinflussen kann, aber nicht muß. Schreibt man $P(m)$ so heißt das *nicht*, daß der Wert der Variablen m auf P einen Einfluß haben muß.

80 Beispiel AUSSAGEN MIT QUANTOREN
Betrachten Sie die vier Aussagen $\forall x \in \mathrm{N} : \exists y \in \mathrm{N} : x = y$, $\forall x \in \mathrm{N} : \forall y \in \mathrm{N} : x = y$, $\exists x \in \mathrm{N} : \forall y \in \mathrm{N} : x = y$ und $\exists x \in \mathrm{N} : \exists y \in \mathrm{N} : x = y$.

(1) Welche dieser Aussagen ist wahr, welche ist falsch? Ist eine Aussage wahr, so geben Sie eine Begründung, ist sie falsch, so geben Sie ein Gegenbeispiel.

(2) Schreiben Sie die Negation dieser Aussagen an und ziehen Sie die Negation schrittweise in die Aussage hinein, so daß die Negation zunächst vor dem zweiten Quantor steht und zuletzt vor der inneren Aussage $x = y$.

(3) Welche dieser negierten Aussagen ist wahr, welche ist falsch? Ist eine Aussage wahr, so geben Sie eine Begründung, ist sie falsch, so geben Sie ein Gegenbeispiel.

(4) Schreiben Sie alle Aussagen so, daß keine Aussage die Variable x als gebundene Variable enthält.

Betrachten Sie nun die Aussagen $\forall x \in \mathrm{N} : \exists_1 y \in \mathrm{N} : x = y$, $\exists_1 x \in \mathrm{N} : \forall y \in \mathrm{N} : x = y$, $\exists_1 x \in \mathrm{N} : \exists_1 y \in \mathrm{N} : x = y$, $\exists x \in \mathrm{N} : \exists_1 y \in \mathrm{N} : x = y$ und $\exists_1 x \in \mathrm{N} : \exists y \in \mathrm{N} : x = y$.

(1) Welche dieser Aussagen ist wahr, welche ist falsch? Ist eine Aussage wahr, so geben Sie eine Begründung, ist sie falsch, so geben Sie ein Gegenbeispiel.

(2) Wo ergibt sich ein anderes Resultat mit dem Existenzquantor als mit dem eindeutigen Existenzquantor? Warum ist das der Fall?

81 Beispiel Frei und gebunden

Untersuchen Sie, welches Auftreten und welche Variablen in den nachfolgenden Ausdrücken frei oder gebunden sind und benennen Sie jede der auftauchenden Variablen, die Sie umbenennen können auch um. Wenn in einem Beispiel eine Variable in zwei unterschiedlichen Quantorbereichen auftaucht, so benennen Sie sie in den unterschiedlichen Bereichen auch unterschiedlich um. Geben Sie zu jeder Umbenennung an, welche Variablen Sie bei der spezifischen Umbenennung nicht benutzen dürfen, und warum.

$$\begin{array}{l}
\forall x : (A(x,y) \Rightarrow B(x,y,z)) \\
(\forall x : A(x,y)) \Rightarrow B(x,y,z) \\
\forall x : A(x,y) \Rightarrow B(x,y,z) \\
\forall x : A(x,y,z) \Rightarrow \forall y : B(x,y,z) \\
(\forall x : A(x,y,z)) \Rightarrow \forall y : B(x,y,z) \\
(\forall x : A(x,y,z)) \Rightarrow (\forall y : B(x,y,z)) \\
(\forall x : A(x,y,z)) \Rightarrow (\forall x : B(x,y,z)) \\
\forall x : (A(x,y,z) \Rightarrow \forall x : B(x,y,z))
\end{array}$$

Ist es möglich, daß eine Variable in einem Ausdruck frei und gebunden ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel, falls nein, begründen Sie, warum.

82 Beispiel Parameter Hiding in Programmiersprachen

Schreiben Sie ein Pascal Programm, an dem Sie den Effekt des Parameter Hiding aufzeigen. Benennen Sie dann die lokale Variable so um, daß dieser Effekt nicht mehr auftritt.