1 Logische Propädeutik

Wir werden uns später noch detaillierter mit Logik befassen. Zuerst aber benötigen wir einen Überblick über die mathematische Symbolik, die wir im folgenden häufig benötigen werden. Ein tieferes Verständnis für die Zusammenhänge zwischen formaler Logik und praktischer Informatik kann sich erst im Laufe weiterführender Studien entwickeln. Dies ist nicht verwunderlich, da diese Zusammenhänge auch erst seit knapp einem Jahrzehnt in den Brennpunkt der Forschung gerückt sind und zu ihrem Verständnis etliche Vorkenntnisse erfordern.

1.1 Aussagen und Operatoren

1 Definition AUSSAGE
Eine *Aussage (proposition)* ist ein Satz, der *wahr (true)* (W, im Englischen T) oder *falsch (false)* (F) sein kann.

2 Definition OPERATOREN
Logische *Operatoren* führen von Aussagen zu neuen Aussagen, wobei der Wahrheitswert der neuen Aussage nur von den Wahrheitswerten der früheren Aussagen abhängen darf.

Sind etwa A und B Aussagen, so ist *(A und B)* wieder eine Aussage. Man schreibt formal $A \wedge B$. A und B sind Bestandteile oder *Teilaussagen* der Aussage $A \wedge B$. $\wedge$ ist jener logische Operator, der durch Bilden der logischen Operation "und" von den Aussagen A und B auf die neue Aussage $A \wedge B$ führt. Eine Aussage ohne logischen Operator heißt eine *atomare (elementare; atomic) Aussage* oder auch ein *Atom*, Aussagen mit logischen Operatoren heißen *zusammengesetzt (compound)*. Wir werden für atomare Aussagen lateinische Großbuchstaben $A, B, \ldots$ und für zusammengesetzte Aussagen calligraphische Schrifttypen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ benutzen. Die Buchstaben W und F stehen aber stets für die logischen Wahrheitswerte "wahr" und "falsch". W und F sind selber auch Aussagen, nämlich die immer wahre respektive die immer falsche Aussage.

Um einen logischen Operator zu definieren, müssen wir seine *Wahrheitstafel (truth table)* angeben, also festlegen, welche Wahrheitswerte die zusammengesetzte Aussage abhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen hat.

3 Definition WICHTIGE LOGISCHE OPERATOREN

(1) Die *Negation (negation)* kehrt die logischen Wahrheitswerte um:

P	$\neg P$
W	F
F	W

Für $\neg P$ schreibt man auch oft $\bar{P}$. Lies $\neg P$ als *non (not)* P.

(2) Die *Konjunktion (conjunction)* $A \wedge B$ zweier Aussagen A, B ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen, A und B, wahr sind. Lies $A \wedge B$ als A *und (and)* B.

(3) Die *Disjunktion (disjunction)* $A \vee B$ zweier Aussagen A, B ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist, also wenn A wahr ist oder B wahr ist (oder beide). Lies $A \vee B$ als A *oder (or)* B.

(4) Die *Alternation (exclusive or)* $A \oplus B$ zweier Aussagen A, B ist genau dann wahr, wenn entweder die eine oder die andere Aussage wahr ist, nicht aber beide. Die Alternation ist das *exklusive* oder auch *alternative* Oder, auch *xor* genannt. Lies $A \oplus B$ als A *exklusiv-oder (xor, alternative)* B.

(5) Die *Implikation (implication)* $A \Rightarrow B$ zweier Aussagen A, B ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind oder aber A falsch ist. Das letztere haben die klassischen Logiker mit dem lateinischen Spruch *ex falso quodlibet* beschrieben, zu deutsch *aus dem Falschen das Beliebige*. Lies $A \Rightarrow B$ als A *impliziert (implies)* B.

(6) Die *Äquivalenz (Bivalenz, equivalency)* $A \Leftrightarrow B$ zweier Aussagen A, B ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen denselben Wahrheitswert haben. Lies $A \Leftrightarrow B$ als A *äquivalent* B.

Die folgende Tabelle legt diese Operatoren fest:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W	W	F	W	W
W	F	F	W	W	F	F
F	W	F	W	W	W	F
F	F	F	F	F	W	W

4 Beispiel NAND UND NOR
Zwei logische Operatoren, die vor allem in der Elektronik und in der Computerarchitektur große Bedeutung haben, sind die Operationen **nand** und **nor**, welche die negierte Konjunktion respektive die negierte Disjunktion darstellen. X **nand** Y ist also die Negation von $X \wedge Y$. Geben Sie Wahrheitstabellen von **nand** und **nor** an.

5 Bemerkung VORRANGSREGELN
Bei komplexeren logischen Formeln benötigt man wie bei arithmetischen Ausdrücken Klammern und Vorrangsregeln. Wir werden die folgenden Konventionen benutzen: Negation vor Konjunktion, diese vor Disjunktion und Alternation, letztere zwei vor Implikation und Äquivalenz. Im Zweifelsfalle sind Klammern zu setzen. Das bedeutet insbesondere:

Ausdruck	**Bedeutung**
$\neg A \wedge B$	$(\neg A) \wedge B$
$A \wedge B \vee C$	$(A \wedge B) \vee C$
$A \vee B \Rightarrow C$	$(A \vee B) \Rightarrow C$
$A \wedge \neg B \vee C \Rightarrow D$	$((A \wedge (\neg B)) \vee C) \Rightarrow D$

6 Bemerkung AUSSAGENVERBINDUNGEN UND OPERATOREN
Nicht jede Verbindung von Aussagen zu neuen Aussagen ist auch ein logischer Operator: Das deutsche Wort “weil” führt von Aussagen auf neue Aussagen, ist aber *kein* Operator. Betrachten wir die folgenden Aussagen:
A : “In Singapur herrscht tropisches Klima.”
B : “Singapur liegt am Äquator.”
C : “Japan liegt im Fernen Osten.”

Alle drei Aussagen sind wahr. Die Aussage “A weil B” ist wahr, die Aussage “A weil C” jedoch nicht. Wir können somit keine Wahrheitstafel für “weil” aufstellen, denn welchen Wert soll “W weil W” haben? Der Wahrheitswert von Aussagen, die durch ein “weil” verbunden sind, hängt offenbar nicht nur vom Wahrheitswert der Teilaussagen ab, wie es in der Definition eines logischen Operators gefordert wird.

1.2 Wahrheit und Umformung

7 Definition TAUTOLOGIE, KONTRADIKTION, ERFÜLLBAR, WIDERLEGBAR
Eine Aussage $\mathcal{A}$ heißt eine *Tautologie (tautology)*, wenn sie immer wahr ist, gleichgültig welche Werte die atomaren Bestandteile haben. Beispiel: $A \vee (\neg A)$.

Eine Aussage $\mathcal{A}$ heißt eine *Kontradiktion (contradiction)*, wenn sie nie wahr, also immer falsch ist, gleichgültig welche Werte die atomaren Bestandteile haben. Beispiel: $A \wedge (\neg A)$.

Eine Aussage $\mathcal{A}$ heißt *erfüllbar (satisfiable)*, wenn es (mindestens) eine Situation für die atomaren Teilaussagen von $\mathcal{A}$ geben kann, in der die Gesamtaussage wahr ist. Beispiel: Die Aussage $A \vee B$ ist wahr, wenn beide atomaren Teilaussagen A und B wahr sind. Somit ist sie erfüllbar.

Eine Aussage $\mathcal{A}$ heißt *widerlegbar (refutable)*, wenn es (mindestens) eine Situation für die atomaren Teilaussagen geben kann, in der die Gesamtaussage falsch ist. Beispiel: $(A \vee B)$.

8 Beispiel Regeln von de Morgan

Beweisen Sie die zwei Gesetze von de Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \qquad \text{und} \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

Mit anderen Worten: Zeigen Sie, daß die obigen zwei Ausdrücke Tautologien sind. Weisen Sie also nach, daß für jede Wahl von Wahrheitswerten für A und B die obigen Ausdrücke wahr sind.

9 Beispiel Einige Tautologien

Beweisen Sie die nachfolgenden Tautologien durch Aufstellen der Wahrheitstafeln und versuchen Sie, diese auch anschaulich zu begründen:

(1) *Tautologie vom Modus Ponens:* $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

(2) *Tautologie von* Asser: $(P \Rightarrow Q) \vee P$

(3) *Tautologie vom ausgeschlossenen Dritten:* $P \vee \neg P$

(4) *Tautologie der Idempotenz:* $P \Leftrightarrow \neg\neg P$

(5) *Tautologie von* Clavius: $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$

(6) *Tautologie der Und–Elimination:* $(P \wedge Q) \Rightarrow P$

(7) *Tautologie der Oder–Introduktion:* $P \Rightarrow (P \vee Q)$

(8) *Tautologie der Selbstbijunktion:* $P \Leftrightarrow P$

(9) *Tautologie vom Kettenschluß:*
$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

(10) *Tautologie von der Importation und der Exportation:*
$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

(11) *Tautologie von* Frege:
$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

10 Beispiel Eine Kontradiktion
Kontradiktionen hängen eng mit Tautologien zusammen: Zeigen Sie, daß $P \wedge \neg P$ eine Kontradiktion und $\neg(P \wedge \neg P)$ eine Tautologie ist. Zeigen Sie nun allgemein, daß eine Aussage $\mathcal{A}$ genau dann eine Kontradiktion ist, wenn die Aussage $\neg\mathcal{A}$ eine Tautologie ist.

11 Beispiel Umformung logischer Operatoren
Logische Operatoren können ineinander umgeformt werden. Zeigen Sie:

(1) Die Implikation kann durch Negation und Disjunktion ausgedrückt werden. Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß $A \Rightarrow B$ zu $B \vee \neg A$ äquivalent ist.

(2) Die Implikation kann durch Negation und Konjunktion ausgedrückt werden. Hinweis: Benutzen Sie (1) und eines der Gesetze von de Morgan. Bestätigen Sie die gefundene Formel, indem Sie ihre Wahrheitswerte nachprüfen.

(3) Die Äquivalenz kann durch Negation, Konjunktion und Disjunktion ausgedrückt werden. Wie? Beweis? Kann man unter Umständen von den benutzten drei Operatoren einen weglassen? Wenn ja, welchen und warum?

(4) Die Negation kann durch **nor** ausgedrückt werden.

(5) Die Konjunktion kann durch **nand** ausgedrückt werden.

(6) Die Konjunktion kann durch **nor** ausgedrückt werden.

(7) Die Disjunktion kann durch **nor** ausgedrückt werden.

(8) Die Äquivalenz kann durch die Implikation und die Konjunktion ausgedrückt werden.

12 Beispiel Erzeugen binärer logischer Operationen
Vollziehen Sie die folgenden Überlegungen nach, die von zentraler Bedeutung für die Computerarchitektur sind:

(1) Es gibt genau zwei verschiedene *unäre* logische Operationen, also solche, die von *einer* Aussage auf eine neue Aussage führen. Sie sind durch die Identität und die Negation gegeben. Schreiben Sie deren Wahrheitstafeln auf.

(2) Eine *binäre* logische Operation führt von *zwei* Aussagen auf eine neue Aussage. Wir kennen eine solche Operation, wenn wir ihre Wahrheitstafel kennen. Betrachten Sie zunächst folgende zwei Wahrheitstafeln der Konjunktion:

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

A	B	$A \wedge B$
F	W	F
W	F	F
F	F	F
W	W	W

Sie unterscheiden sich ausschließlich durch die Anordnung ihrer Zeilen, enthalten sonst aber dieselbe Information. Wir wollen in dieser Aufgabe die Anordnung in den linken beiden Spalten der linken Tabelle, zusammen mit der Tatsache, daß das Atom A immer ganz links steht, gefolgt vom lexikalisch größeren B, als Standardanordnung in jeder weiteren Wahrheitstafel benutzen. Dadurch ist die Gestalt der linken beiden Spalten festgelegt und man kann sich bei der Angabe der Wahrheitstafel auf die Angabe der rechten Spalte beschränken. Aus Platzersparnisgründen wollen wir diese Spalte von oben nach unten gelesen als Zeile schreiben. Die Wahrheitstafel und die binäre Operation $\wedge$ ist somit durch die Zeile respektive Spalte $WFFF$ festgelegt.

(3) Welche Operationen sind durch die Zeilen $WWWF$ und $WFFW$ festgelegt? Weshalb gibt es genau 16 unterschiedliche binäre Operationen?

(4) Tragen Sie in der weiter unten folgenden Tabelle in der Spalte unter **Operation** in der korrekten Zeile die Ihnen bekannten logischen Operationen der Disjunktion, Äquivalenz, Implikation, Alternation, **nand** und **nor** ein.

(5) Betrachten Sie in derselben Tabelle in der Spalte **Darstellung** und der Zeile $WFFF$, wie man sehr einfach eine Darstellung der entsprechenden logischen Operation angeben kann. Erinnern Sie sich an die oben fixierte Standardanordnung der Wahrheitstafeln. Der erste Wert der Zeile $WFFF$, der Wert W also, stammt aus der Zeile, in der A und B wahr sind. Zur Erinnerung:

Wert	**Situation**
Erster Wert	A und B sind wahr
Zweiter Wert	A und $\neg B$ sind wahr
Dritter Wert	$\neg A$ und B sind wahr
Vierter Wert	$\neg A$ und $\neg B$ sind wahr

Der Zeile $WFFF$ entspricht also eine logische Operation, die genau dann wahr ist, wenn A und B wahr sind. Das ist, wie wir wissen, die Konjunktion von A und B, dargestellt durch $A \wedge B$.

Zeile	**Operation**	**Darstellung**
$WWWW$		
$WWWF$		
$WWFW$		
$WWFF$		
$WFWW$		
$WFWF$		
$WFFW$		
$WFFF$	Konjunktion	$(A \wedge B)$
$FWWW$		
$FWWF$		
$FWFW$		
$FWFF$		
$FFWW$		
$FFWF$		
$FFFW$		
$FFFF$		

(6) Betrachten Sie nun als komplizierteres Beispiel die Zeile $WFWF$ der obigen Tabelle. Ihr entspricht eine logische Operation, die genau dann wahr ist, wenn A und B wahr sind (1. Buchstabe in $WFWF$) oder wenn $\neg A$ und B wahr sind (3. Buchstabe in $WFWF$). Dies läßt sich am besten darstellen durch $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$.

(7) Verfahren Sie nun wie oben und tragen Sie für jede Zeile in obige Tabelle die entsprechende Darstellung ein, wobei Sie die Operatorenzeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ benutzen.

(8) Wir haben durch die bisherigen Überlegungen folgendes gezeigt: Jede binäre, logische Operation kann durch die Operationen Negation, Disjunktion und Konjunktion ausgedrückt werden. Zeigen Sie nun durch ein einfaches Argument, daß auch Negation und Disjunktion allein oder auch Negation und Konjunktion allein ausreichen würden.

(9) In Beispiel **??** haben wir gesehen, daß Negation, Disjunktion und Konjunktion alle durch **nor** ausgedrückt werden können. Begründen Sie nun, daß jede binäre und unäre logische Operation durch **nor** allein ausgedrückt werden kann.

(10) Interpretieren Sie im Lichte des bisherigen die folgende Aussage aus einem Buch über Computerarchitektur: "Wenn ein Mikroprozessor jede binäre logische Operation ausdrücken können soll, so genügt es, die **nor** Operation elektronisch zu realisieren, da alle anderen binären logischen Operationen auf

diese zurückgeführt werden können." Wieso ist das von großer Bedeutung für den Chip–Designer?

13 Beispiel ERZEUGEN N-ÄRER LOGISCHER OPERATIONEN
Wir wollen uns anhand eines Beispiels überzeugen, daß auch logische Operationen von mehr als zwei Aussagen immer durch Negation, Konjunktion und Disjunktion dargestellt werden können. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstafel:

P	Q	R	$\bullet(P,Q,R)$
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	F
W	F	F	F
F	W	W	W
F	W	F	W
F	F	W	F
F	F	F	F

Drücken Sie die oben angegebene ternäre logische Operation durch Negation, Konjunktion und Disjunktion aus. Eliminieren Sie aus dem sich ergebenden Ausdruck die Disjunktion. Begründen Sie nun allgemein, weshalb jede logische Operation in beliebig vielen Aussagen stets durch Negation und Konjunktion allein ausgedrückt werden kann.

14 Definition ADÄQUATE MENGEN VON OPERATOREN
Eine Menge logischer Operatoren heißt *adäquat (adequate)*, wenn jede logische Operation durch die Operatoren dieser Menge ausgedrückt werden kann. Man ist besonders an *minimal adäquaten* Mengen interessiert, das sind adäquate Mengen, bei denen kein Operator weggelassen werden kann, ohne daß die Menge die Eigenschaft der Adäquatheit verliert: $\{\wedge, \neg, \vee\}$ ist adäquat, aber nicht minimal adäquat. $\{\wedge, \neg\}$ ist minimal adäquat, da tatsächlich beide Operationen benötigt werden.

15 Theorem ADÄQUATE MENGEN VON OPERATOREN
Folgende Mengen von Operatoren sind minimal adäquat: $\{\mathbf{nand}\}$, $\{\mathbf{nor}\}$, $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \vee\}$.

16 Beispiel TEST AUF ADÄQUATHEIT
Ist die Menge $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ adäquat oder nicht? Wenn ja, geben Sie einen Beweis dafür, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an, indem Sie eine logische Operation anschreiben, die nicht durch diese Operationen ausgedrückt werden kann.

17 Beispiel BEDINGTER AUSDRUCK
Geben Sie zur ternären Operation $cond(P,Q,R) := (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow R)$ die

Wahrheitstabelle an und zeigen Sie, daß *cond* gerade dem *bedingten Ausdruck* `if` P `then` Q `else` R `fi` entspricht.

In vielen Programmiersprachen ist `if` P `then` Q `else` R `fi` kein logischer Ausdruck, der die Werte W oder F annehmen kann, sondern eine ausführbare Anweisung: P muß im Typsystem der Sprache als wahr oder falsch interpretiert werden können. Je nach dieser Interpretation wird dann die Anweisung Q oder die Anweisung R ausgeführt. Weder Q noch R haben notwendigerweise logisch interpretierbare Werte, die ganze Anweisung muß keinen Wert tragen.

Manche Programmiersprachen verfügen jedoch über den bedingten Ausdruck: So schreibt man etwa in der Programmiersprache C für $cond(P, Q, R)$ den Ausdruck $(P\,?\,Q : R)$. P, Q und R sind hierbei Ausdrücke, deren Wert logisch interpretierbar ist. Es ist in C allerdings auch erlaubt, daß Q und R Werte haben, die nicht logisch interpretiert werden können. Die Anweisung $Z = (X > 0\,?\,X : -X)$ etwa weist der Variablen Z den Absolutbetrag des aktuellen Wertes der Variablen X zu.

1.3 Implikation und Folgerung

18 Bemerkung Implikation, Stark-Schwach

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Aussagen und sei $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr, dann sagt man auch $\mathcal{A}$ *impliziert (implies)* $\mathcal{B}$. Das bedeutet:

(1) Ist $\mathcal{A}$ wahr, so ist auch $\mathcal{B}$ wahr. Ist $\mathcal{A}$ nicht wahr, so wird dadurch über $\mathcal{B}$ nichts ausgesagt. $\mathcal{B}$ kann dann sowohl wahr als auch falsch sein.

(2) Es wird nur eine Aussage über den *logischen* Zusammenhang gemacht aber *keine Aussage über einen kausalen oder temporalen* Zusammenhang.

Sind zwei beliebige Aussagen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ gegeben, so folgt immer die eine aus der anderen oder die andere aus der einen. Wir beweisen das durch Fallunterscheidung über die möglichen Wahrheitswerte:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	W	F	W
F	F	W	W	W

(3) Gilt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, so ist die Aussage $\mathcal{A}$ *stärker (stronger)* und die Aussage $\mathcal{B}$ *schwächer (weaker)*. Aussagen werden also in Richtung des Implikationspfeils schwächer. Insbesondere ist W die schwächste Aussage und F die stärkste

Aussage. F ist insbesondere stärker als W, und so gilt auch $F \Rightarrow W$. Ähnlich gelten $(A \wedge B) \Rightarrow A$ und $(A \wedge B) \Rightarrow B$. Eine Konjunktion ist also stärker als ihre einzelnen Bestandteile.

19 Beispiel ZUR IMPLIKATION
Machen Sie sich die Unterschiede zwischen dem Begriff "folgt" der deutschen Sprache und dem Begriff der Implikation in der Logik noch einmal klar:

(1) Sei P die Aussage "Der Jupiter ist aus Schokolade" und sei Q die Aussage "Am 1. 1. 2030 wird es in Argentinien regnen". Zeigen Sie, daß im logischen Sinn aus einer dieser zwei Aussagen die andere Aussage folgt: Zeigen Sie also, daß $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ wahr ist.

(2) Studieren Sie noch einmal den oben angeführten Beweis des folgenden Satzes: Sind $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ zwei *beliebige* Aussagen, dann folgt aus einer dieser Aussagen die andere. Bringen Sie dieses Paradoxon in Zusammenhang mit der Bemerkung, daß für $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$ nur in jenen Fällen etwas bewiesen werden muß (= etwas ausgesagt wird), in denen die Voraussetzung $\mathcal{D}$ wahr ist.

(3) Zeigen Sie den folgenden Satz: Sind $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ zwei beliebige Aussagen und $\mathcal{R}$ eine weitere Aussage. Dann folgt $\mathcal{P}$ aus $\mathcal{R}$ oder es folgt $\mathcal{Q}$ aus $\neg\mathcal{R}$. Zeigen Sie also, daß $(\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q})$ eine Tautologie ist.

(4) Beweisen Sie die Tautologie von CLAVIUS, $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$, und die Tautologie des DUNS SCOTUS, $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$, und interpretieren Sie diese im gegenwärtigen Zusammenhang anschaulich.

20 Bemerkung ZUM SPRACHGEBRAUCH
Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ zweier Aussagen ist identisch zu ihrer wechselseitigen Implikation $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Umgangssprachlich sagt man für $A \Rightarrow B$ "wenn A dann B" und für $A \Leftrightarrow B$ sagt man auch "A genau dann wenn B". Die Wendung "A nur dann wenn B" bezeichnet ebenso $A \Rightarrow B$, während "A dann wenn B" der Aussage $B \Rightarrow A$ entspricht. Die Kombination dieser beiden Sätze führt zur Wendung "A dann und nur dann wenn B", die somit wieder für die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ steht. Im Englischen findet man auch "A iff B" für die Äquivalenz. Das doppelte 'f' ist hierbei beabsichtigt und gestattet die Abgrenzung von "A if B", was für $B \Rightarrow A$ steht.

Falls $A \Rightarrow B$ gilt, so nennt man A auch eine *hinreichende Voraussetzung für (sufficient condition)* B, da A alleine hinreicht, um die Gültigkeit von B zu garantieren. Andererseits nennt man B eine *notwendige Bedingung (necessary condition) für* A, da, falls A gilt, notwendigerweise B gelten muß. Falls $A \Leftrightarrow B$ gilt, dann ist A eine *notwendige und hinreichende Bedingung für* B. Aufgrund der Symmetrie der

Äquivalenz gilt das natürlich auch nach Vertauschen von A und B.

1.4 Formale Logik

21 Bemerkung VORGEHEN IN DER LOGIK
Aufgabe der Logik ist es, Überlegungen über die Alltagswelt oder auch über mathematische Objekte mittels Schriftzeichen festzuhalten. Zu diesem Zweck entwirft man eine geeignete *formale Sprache* aus abstrakten Symbolen. So ist etwa die Zeichenkette $(A \wedge B)$ ein syntaktisch korrektes[1] Wort der formalen Sprache der Aussagenlogik. Nun legt man fest, welche Eigenschaften der Alltagswelt oder der Mathematik in welchem Zusammenhang mit diesen abstrakten Zeichenketten stehen. So legt man etwa fest, daß wir die Zeichenkette $(A \wedge B)$ genau dann als *wahr* oder auch *gültig* betrachten wollen, wenn die atomare Aussage A *und* die atomare Aussage B wahr sind. Wann letzteres der Fall ist, sagt uns entweder die Alltagswelt (wenn wir also die atomaren Aussagen durch deutsche Sätze interpretieren, deren Wahrheitsgehalt wir unmittelbar einsehen können) oder aber in der Mathematik die *Modellrelation* oder auch *Interpretation*. Letzteres wird noch genauer erläutert. Diese Festlegung des Wahrheitsgehalts einer Zeichenkette in der jeweils betrachteten Welt nennt man *Semantik*. Sie erlaubt uns, gewisse Weltwahrheiten in der gewählten Sprache, hier jener der Aussagenlogik, zu beschreiben.

Ein zweites Ziel der Logik ist es, aus Zeichenketten, von denen wir wissen, daß sie wahre Aussagen sind, durch ein stures, mechanisches Umformen neue Zeichenketten *herzuleiten*, welche wiederum wahre Aussagen sind. Die Wahrheit dieser hergeleiteten Aussagen sehen wir nicht dadurch ein, daß wir ihren Wahrheitsgehalt in der betrachteten Welt nachprüfen – denn gerade diese aufwendige Arbeit wollen wir ja vermeiden – sondern aus dem Wissen, daß wir unser System des mechanischen Umformens von Zeichenketten nach Regeln gerade so konstruiert haben, daß durch Umformung aus wahren Zeichenketten wieder wahre Zeichenketten werden. Diese Eigenschaft nennt man auch die *Korrektheit* des Umformungssystems.

Für eine Zeichenkette können also zwei unterschiedliche Dinge gelten:

- Sie ist *wahr (gültig, true, valid) oder falsch (false, invalid)* innerhalb der von uns betrachteten Semantik.
- Sie ist *herleitbar (ableitbar, deducible) oder nicht herleitbar (not deducible)* durch das von uns betrachtete Umformungssystem.

[1] Syntaktisch inkorrekt wäre etwa der Ausdruck $)A \wedge \wedge \neg B \neg(()$.

Wenn wir unser Umformungssystem und unsere Semantik richtig aufeinander abgestimmt haben, dann hängen diese beiden Aspekte auch zusammen. Ein Umformungssystem heißt in Bezug auf eine Semantik

- *korrekt*, wenn jede herleitbare Formel wahr ist.
- *vollständig*, wenn jede wahre Formel herleitbar ist.

Wenn wir ein korrektes und vollständiges Umformungssystem haben, so haben wir dadurch ein Instrumentarium, das uns erlaubt, jede Wahrheit der betrachteten Welt, die wir in unserer formalen Sprache ausdrücken können, durch Umformen von Zeichenketten zu bekommen. Wir werden später sehen, daß dieses ambitiöse Ziel praktisch nur teilweise erreicht werden kann. Wahrheit ist mehr als Umformungen von Zeichenketten.

22 Bemerkung Zur Definition von Herleitungssystemen
Ein solches Herleitungssystem oder Umformungssystem wird üblicherweise folgendermaßen angegeben:

(1) Man gibt eine endliche Zahl von *Axiomen (axioms)* an.

(2) Man gibt eine endliche Zahl von *Axiomenschemata (axiom schemes)* an, das sind Regeln, mit denen man neue Axiome bilden kann.

(3) Man gibt eine endliche Zahl von *Schlußregeln (deduction rules)* an, das sind Regeln, die angeben, wie man Zeichenketten in neue Zeichenketten umzuformen hat.

Eine Zeichenkette $\mathcal{A}$ heißt *herleitbar (deducible)*, formal notiert $\vdash \mathcal{A}$, wenn sie unter Anwendung der Schlußregeln aus den vorgegebenen Axiomen und den aus den Axiomenschemata generierten Axiomen in endlich vielen Schritten gebildet werden kann: Man beginnt also, auf das Blatt Papier beispielsweise einige Axiome zu schreiben, dann einige aus den Axiomenschemata generierte Axiome, dann wählt man sich beliebig einige der aufnotierten Wörter aus und wendet eine passende Schlußregel darauf an, um einen neuen Ausdruck zu bekommen, den man wieder auf das Papier schreibt, dann notiert man sich wieder einige Axiome, benutzt wieder eine passende Schlußregel und so weiter, ganz nach Belieben. Alle Ausdrücke, die so im Laufe der Zeit unter präziser Beachtung dieser Regeln auf das Blatt geschrieben werden, sind herleitbare Ausdrücke.

23 Bemerkung Zur Anwendung von Herleitungssystemen
Wir können Herleitungssysteme auf zwei unterschiedliche Arten benutzen:

Bei *empirischem* Vorgehen haben wir Objekte unserer Alltagswelt oder unserer Vorstellung, also eine Semantik, gegeben. Wenn wir diese Welt durch eine geeignete

Sprache beschreiben, so legen wir dabei fest, welche Wörter dieser Sprache wahr sind und welche falsch. Nun wollen wir ein Herleitungssystem konstruieren, das in der Lage ist, alle in unserer Welt wahren Wörter durch Regelanwendung zu generieren. Da wir bereits festgelegt haben, welche Wörter wahr sind und welche falsch, sind wir in der Wahl unseres Herleitungssystems stark eingeschränkt. Insbesondere dürfen wir nur wahre Wörter als Axiome benutzen. Ziel des empirischen Vorgehens ist es, das menschliche Nachdenken über eine bekannte Welt durch textuelle Umformung von Wörtern durch ein Umformungssystem zu ersetzen.

Bei *axiomatischem* Vorgehen geben wir eine Sprache und ein Herleitungssystem an und fordern, daß alle Wörter, die wir mit unseren Regeln herleiten können, auch wahr seien. Erst danach stellen wir uns die Frage, ob es tatsächlich Objekte gibt, die unseren Axiomen genügen. Dies braucht, etwa im Fall sogenannter inkonsistenter Herleitungssysteme, keineswegs so sein. Zu einem Herleitungssystem kann es aber auch eine größere Zahl unterschiedlicher Objekte geben, die alle durch die vorgegebene Axiomatik beschrieben werden. In diesem Kontext kann man nicht über die Wahrheit von Axiomen reflektieren, da diese per definitionem als wahr angesehen werden. Ziel des axiomatischen Vorgehens ist das Studium von Objekten, die wir zunächst nur aufgrund der sie beschreibenden Axiome kennen.

Beide Vorgehensweisen verlangen aufeinander abgestimmte Umformungssysteme und Semantiken.

24 Bemerkung KORREKTE HERLEITUNGSSYSTEME
Um nachzuweisen, daß ein Herleitungssystem korrekt ist, muß man drei Dinge zeigen:

(1) Die Zeichenketten, die als *Axiome* benutzt werden, müssen wahr[2] sein.

(2) Jede Zeichenkette, die aus den *Axiomenschemata* gebildet werden kann, muß wahr sein.

(3) Die *Schlußregeln* müssen, auf wahre Zeichenketten angewendet, wieder wahre Zeichenketten ergeben. Viele Schlußregeln sind von Tautologien abgeleitet.

25 Beispiel AXIOME, SCHEMATA, SCHLUSSREGELN

(1) Zeigen Sie, daß der Ausdruck $W \wedge W$ als ein korrektes Axiom der Aussagenlogik benutzt werden kann.[3]

[2] Wir stellen uns jetzt also auf den empirischen Standpunkt.

[3] Wir nehmen also wieder den empirischen Standpunkt ein und betrachten die Semantik der Aussagenlogik als durch die Wahrheitstafeln festgelegt. Natürlich könnten wir auch einen axiomatischen Standpunkt einnehmen und die Aussagenlogik durch Axiome festlegen. Dann wären die Wahrheitstafeln Konsequenzen der Axiome.

(2) Das Axiomenschema “Wenn $\mathcal{G}$ ein beliebiger Ausdruck der Aussagenlogik ist, gleichgültig ob wahr oder nicht, dann ist der neue Ausdruck $(\mathcal{G} \vee \neg\mathcal{G})$ ein Axiom” heißt das *Axiom(enschema) vom ausgeschlossenen Dritten (tertium non datur)*. Zeigen Sie, daß es als ein korrektes Axiomenschema der Aussagenlogik benutzt werden kann.

(3) Die Schlußregel “Wenn ich im Sinne des oben beschriebenen Herleitungsprozesses die Ausdrücke $\mathcal{G}$ und $(\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H})$ bereits hergeleitet habe, dann ist der Ausdruck $\mathcal{H}$ ebenfalls herleitbar. $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ sind dabei beides syntaktisch korrekte Ausdrücke der Aussagenlogik” heißt *Schlußregel des Modus Ponens*. Zeigen Sie, daß diese Schlußregel als korrekte Schlußregel der Aussagenlogik benutzt werden kann. Wird Modus Ponens also auf die Ausdrücke $\mathcal{G}$ und $(\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H})$ angewendet und sind diese wahr, so ist auch der generierte Ausdruck $\mathcal{H}$ wieder wahr.

26 Beispiel Schlussregel und Tautologie der Kontraposition

(1) Beweisen Sie, daß die Kontraposition $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ eine Tautologie ist.

(2) Aus dieser Tautologie kann man die Schlußregel der Kontraposition bilden: “Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ logische Ausdrücke und ist $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ bereits hergeleitet, dann kann man auch $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ herleiten”. Zeigen Sie, daß diese Schlußregel korrekt ist.

27 Bemerkung Definitionen, Sätze und Beweise

Die Arbeitsweise der formalen Mathematik besteht in einer Abfolge von *Definitionen (definitions), Sätzen (propositions)* und *Beweisen (proofs)*. Spezielle Sätze tragen eigene Namen: *Theoreme (theorems)* sind Sätze von besonderer Tragweite, *Lemmata (lemmata)* sind häufig benötigte Hilfssätze und *Korollare (corollaries)* sind interessante Folgerungen oder Spezialfälle, die man aus Theoremen ableiten kann.

Beweise sind Überlegungen und Argumentationen, anhand welcher wir die Richtigkeit eines Satzes einsehen können. Ein Beweis kann umgangssprachlich aber auch sehr formal ausgeführt sein. In beiden Fällen bleibt der Mensch die letzte Instanz für die Korrektheit eines Beweises, auch wenn sehr formale Schlußtechniken zum Einsatz gelangen: Diese wurden letztlich ja auch von Menschen entworfen.

Es gibt drei besonders wichtige Beweistechniken in der Mathematik. Der *direkte Beweis (direct proof)* entspricht Überlegungen der Form: “Laut Voraussetzung gilt, daraus folgt, daraus folgt, und das war eben zu zeigen.” Bei einem *indirekten Beweis (indirect proof)* oder *Beweis durch Widerspruch (proof by contradiction)* nimmt man an, die zu beweisenden Behauptung wäre falsch. Dann führt man verschiedene Schlüsse aus, bis ein Widerspruch auftritt. Da man mittels korrekter Schlüsse von korrekten Aussagen nie auf einen Widerspruch kommen kann, muß also die Annahme, die zu beweisenden Behauptung wäre falsch gewesen, falsch sein. Dann muß die Behauptung selber aber richtig sein. Die Technik der *vollständigen Induktion (complete induction)* werden wir noch später kennenlernen. Das Ende eines Beweises wird meist mit dem Zeichen $\square$, dem lateinischen Kürzel *qed (quod erat demonstrandum)* oder der deutschen Übersetzung *wzbw (was zu beweisen war)* gekennzeichnet.