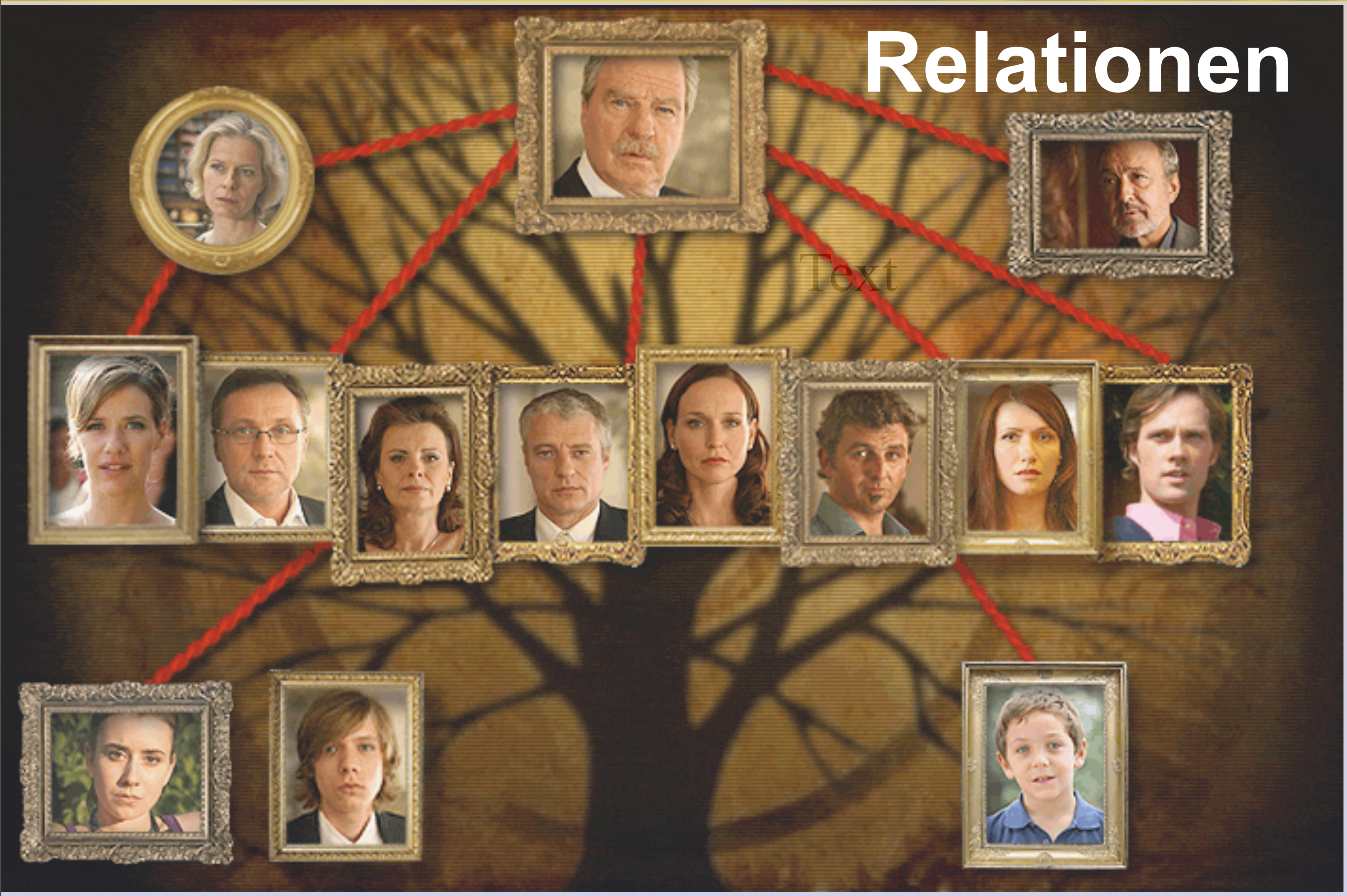
educational engineering lab
Department for Information Technology
University of Zurich



# Beispiele für Relationen

- eine Person X ist Mutter von einer Person Y
- eine Person X ist verheiratet mit einer Person Y
- eine Person X wohnt am gleichen Ort wie eine Person Y
- eine Person X älter als eine Person Y
- ein Ort X ist erreichbar von einem Ort Y
- ein Objekt X ist Teil eines Objektes Y
- eine Tätigkeit X ist Voraussetzung für eine Tätigkeit Y
- eine Klasse X ist Subklasse einer Klasse Y
- eine Person X spricht eine Sprache Y
- ein Objekt X ist Instanz einer Klasse Y

# n-stellige Relationen

## Definition

**Eine n-stellige Relation R ist eine Teilmenge des karthesischen Produktes von n Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$:**

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

# Binäre Relation

## Definition

**Eine binäre Relation R ist eine Teilmenge des karthesischen Produktes zweier Mengen A und B:**

$$R \subseteq A \times B$$

**Für**

$$(a,b) \in R$$

**schreibt man auch**

$$aRb$$

# Binäre Relationen und Graphen

Eine binäre Relation R kann durch einen Graphen veranschaulicht werden in dem jedes Dupel (a,b) als Kante zwischen den Knoten a und b interpretiert wird.

Umgekehrt entspricht jede Kante (a,b) eines Graphen die zwei Knoten a und b verbindet einer Relation R für die aRb als „a ist mit b direkt verbunden“ interpretiert werden kann.

# Reflexivität

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist reflexiv, wenn jedes Element von S zu sich selbst in Relation steht:

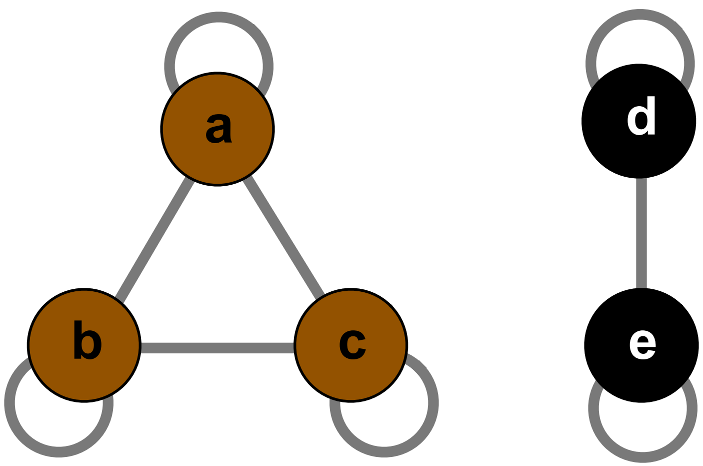
All x: $x \in S$: xRx

zB: die Relation „hat dieselbe Mutter wie“ ist reflexiv

Reflexive Relationen können durch einen Graphen modelliert werden, bei dem alle Knoten Schlaufen haben.

# Beispiel für Reflexivität

**Die Relation x <u>hat dieselbe Haarfarbe wie</u> y ist reflexiv.**




| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 1 | | |
| b | 1 | 1 | 1 | | |
| c | 1 | 1 | 1 | | |
| d | | | | 1 | 1 |
| e | | | | 1 | 1 |

**Alle Elemente der Hauptdiagonale der Adjazenzmatrix sind Einsen.**

# Irreflexivität

**Eine binäre Relation R $\subseteq$ S$\times$S ist irreflexiv, wenn kein Element von S zu sich selbst in Relation steht:**

$$\text{All } x\text{: } x \in S\text{: } \neg(xRx)$$

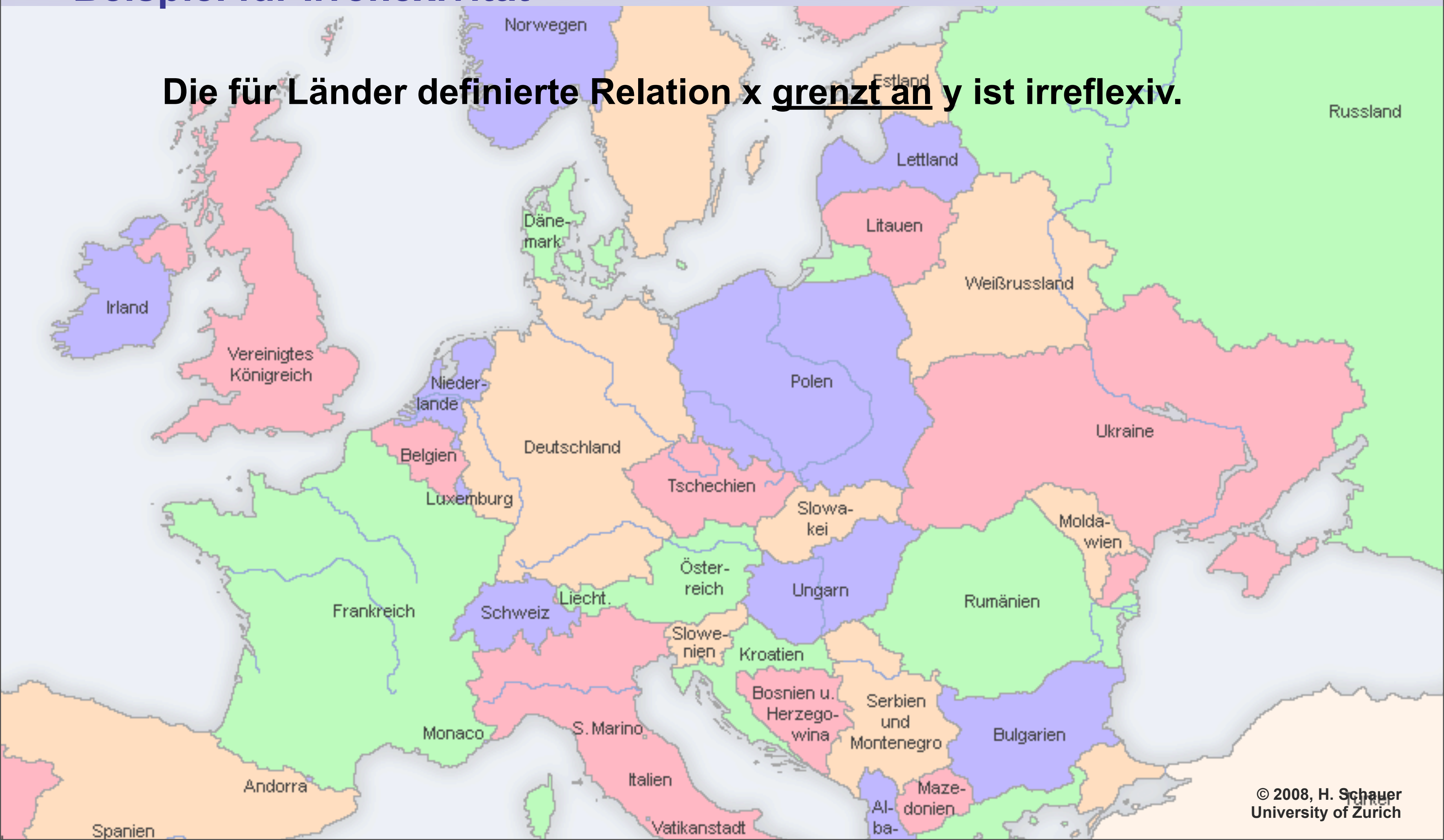
**zB: die Relation „ist Kind von“ ist irreflexiv**

**Es gibt Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind.**

**Irreflexive Relationen können durch einen schlaufenfreien Graphen modelliert werden.**

# Beispiel für Irreflexivität

**Die für Länder definierte Relation x <u>grenzt an</u> y ist irreflexiv.**



# Beispiel für Irreflexivität

| | 10 | B | D | K | A |
|---|---|---|---|---|---|
| **10** | | | | | |
| **B** | 1 | | | | |
| **D** | | 1 | | | |
| **K** | | | 1 | | |
| **A** | | | | 1 | |

**Die Relation x sticht y ist irreflexiv.**

**Kein Element der Hauptdiagonale der Adjazenzmatrix ist Eins.**

# Symmetrie

**Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist symmetrisch, wenn aus xRy auf yRx geschlossen werden kann:**

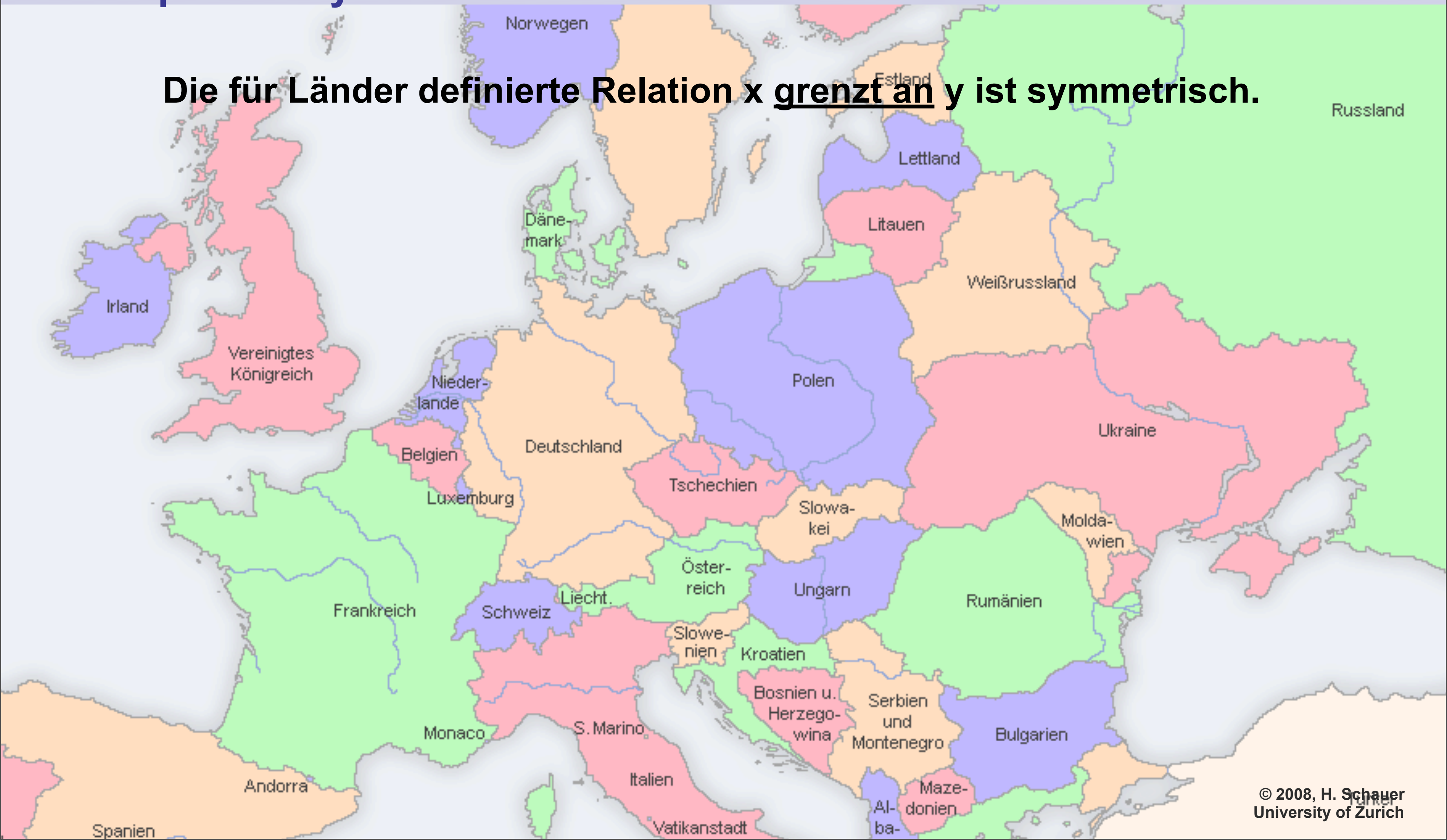
$$\text{All } x,y\text{: } x,y \in S\text{: } xRy \Rightarrow yRx$$

**zB: die Relation „ist verheiratet mit“ ist symmetrisch**

**Symmetrische Relationen entsprechen ungerichteten Graphen.**

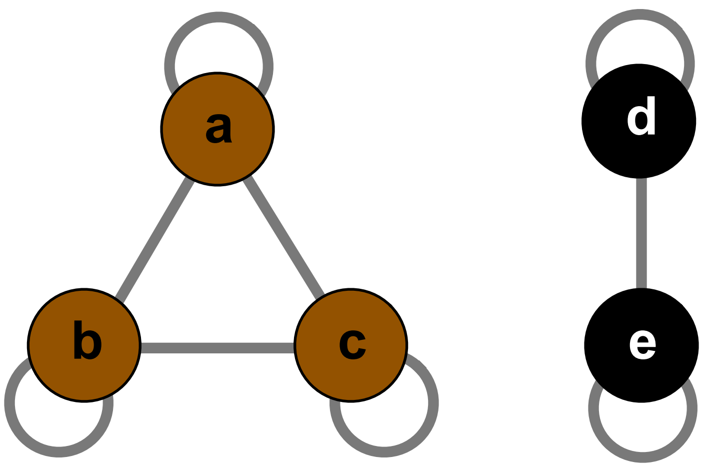
# Beispiel für Symmetrie

**Die für Länder definierte Relation x <u>grenzt an</u> y ist symmetrisch.**



# Beispiel für Symmetrie

**Die Relation x <u>hat dieselbe Haarfarbe wie</u> y ist symmetrisch.**




| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 1 | | |
| b | 1 | 1 | 1 | | |
| c | 1 | 1 | 1 | | |
| d | | | | 1 | 1 |
| e | | | | 1 | 1 |

**Die Adjazenzmatrix ist symmetrisch bezüglich ihrer Hauptdiagonale.**

# Antisymmetrie

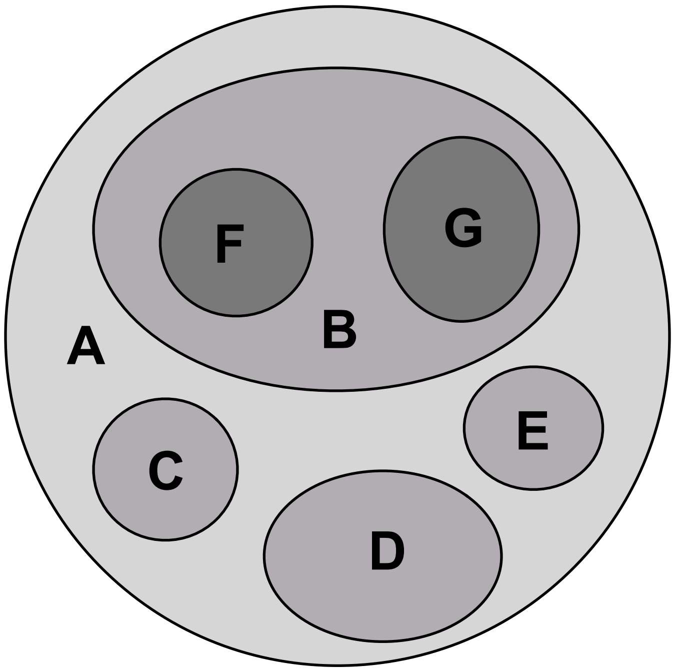
**Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist antisymmetrisch, wenn xRy und yRx nur dann gleichzeitig gelten kann, wenn x und y gleich sind:**

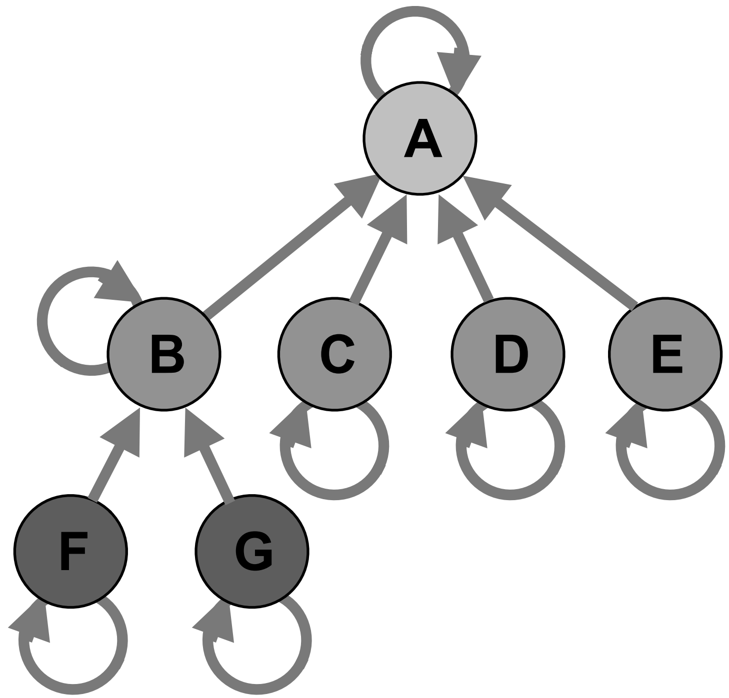
$$\text{All } x,y\text{: } x,y \in S\text{: } (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x=y$$

**zB: die Relation ≤ ist antisymmetrisch**

**Antisymmetrische Relationen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.**

## Beispiel Antisymmetrie




**Die auf Mengen anwendbare Relation „ist Teilmenge von“ ist antisymmetrisch**

# Asymmetrie

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist asymmetrisch, wenn xRy und yRx nicht gleichzeitig gelten kann:

$$\text{All } x,y\text{: } x,y \in S\text{: } xRy \Rightarrow \neg(yRx)$$

zB: die Relation „ist Kind von“ ist asymmetrisch

Eine Relation ist genau dann asymmetrisch, wenn sie antisymmetrisch und irreflexiv ist.

Auch asymmetrische Relationen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.

# Beispiel für Asymmetrie


| | 10 | B | D | K | A |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | | |
| B | 1 | | | | |
| D | | 1 | | | |
| K | | | 1 | | |
| A | | | | 1 | |

Die Relation x <u>sticht</u> y ist asymmetrisch.

# Unsymmetrie

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist unsymmetrisch, wenn aus xRy nicht notwendig yRx folgt:

$$\text{Ex } x,y\text{: } x,y \in S\text{: } xRy \wedge \neg(yRx)$$

zB: die zwischen Personen definierte Relation x „kennt“ y ist im allgemeinen unsymmetrisch (ausser die Personen bilden eine Clique, dann ist die Relation symmetrisch)

Auch unsymmetrische Relationen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.

# Transitivität

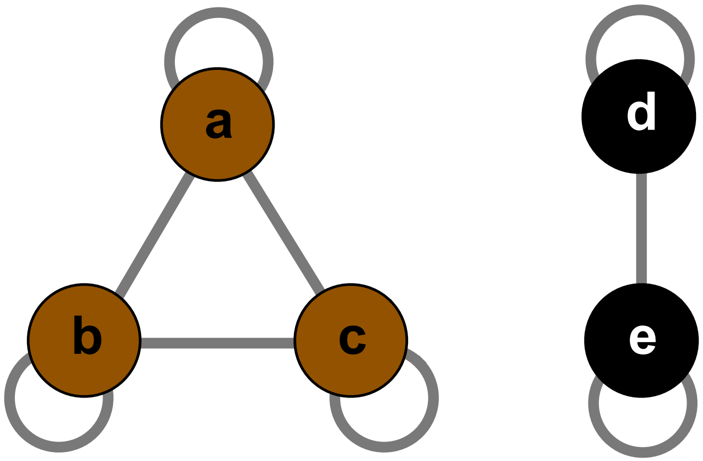
Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist transitiv, wenn aus xRy und yRz auf xRz geschlossen werden kann:

$$\text{All } x,y,z\text{: } x,y,z \in S\text{: } (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

zB: die Relation „ist Vorfahre von“ ist transitiv

# Beispiel für Transitivität

**Die Relation x <u>hat dieselbe Haarfarbe wie</u> y ist transitiv.**




| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 1 | | |
| b | 1 | 1 | 1 | | |
| c | 1 | 1 | 1 | | |
| d | | | | 1 | 1 |
| e | | | | 1 | 1 |

# Transitive Hülle

**Die transitive Hülle einer transitiven Relation ergänzt die gegebenen direkten Beziehungen durch alle durch Transitivität herleitbaren indirekten Beziehungen.**

**zB: die transitive Hülle aller direkten Vorfahren einer Menge von Personen enthält auch alle indirekten Vorfahren (dh Vorfahren der Vorfahren).**

# Beispiel für Transitive Hülle

| | 10 | B | D | K | A |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | | |
| B | 1 | | | | |
| D | 1 | 1 | | | |
| K | 1 | 1 | 1 | | |
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | |

**Matrix der Transitiven Hülle der Relation x <u>sticht</u> y.**

# Zyklenfreiheit

**Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist azyklisch, wenn es keine Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt für die $x_1 R x_2$ und $x_2 R x_3$ und ... und $x_{n-1} R x_n$ und $x_n R x_1$ gilt:**

**All n: $n \in N$: $\neg$(Ex $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$: $x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} R x_n \wedge x_n R x_1$ )**

**Jede azyklische Relation ist irreflexiv.**

**zB: die Relation „ist Vorfahre von" ist azyklisch**

**Azyklische Relationen können durch azyklische Graphen modelliert werden.**

# Totale Relationen

Eine binäre Relation R $\subseteq$ S$\times$S ist total wenn für je zwei beliebige Elemente x und y entweder xRy oder yRx gilt.

All x,y: x,y$\in$S: xRy $\vee$ yRx

Totale Relationen sind immer reflexiv.

zB: die für Personen definierte Relation "ist nicht älter als" ist total.

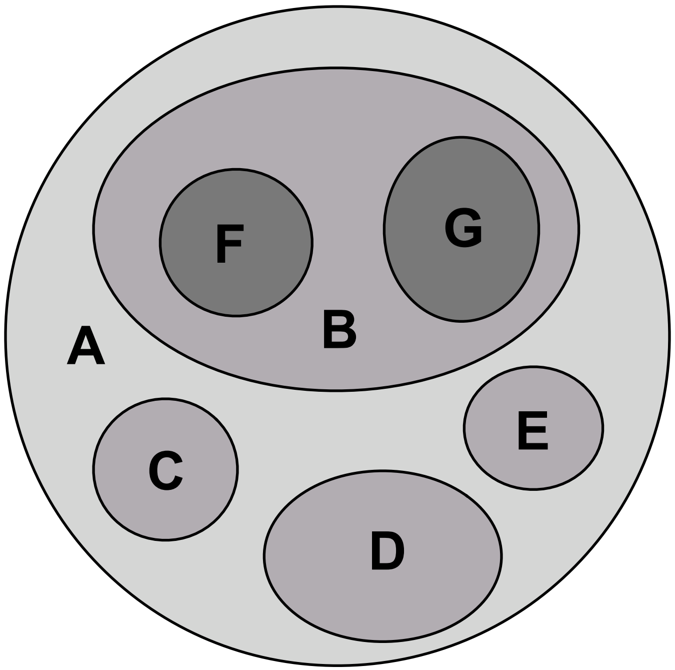
## Halbordnungen

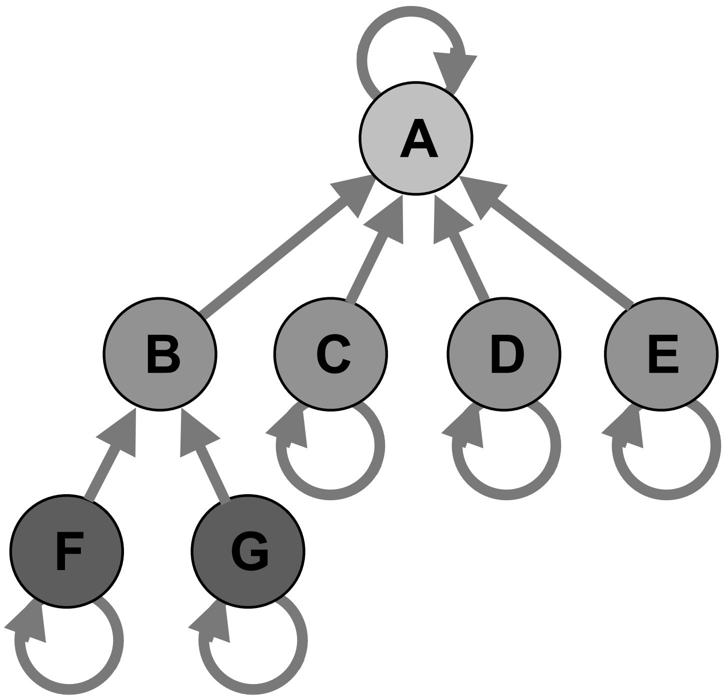
**Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist eine Halbordnung oder partielle Ordnung, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.**

**zB: die auf Mengen anwendbare Relation „ist Teilmenge von" bildet eine Halbordnung.**

**Halbordnungen können durch gerichtete Graphen modelliert werden.**

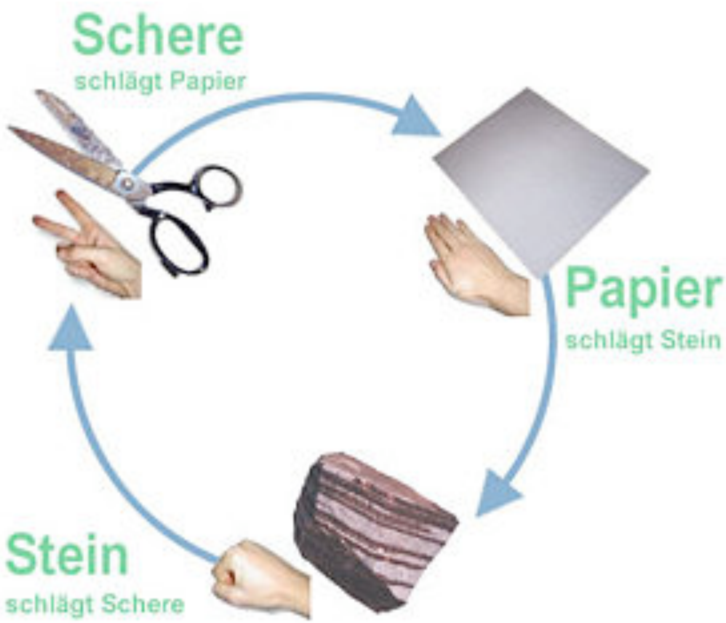
# Beispiel "Teilmengen"




**Die auf Mengen anwendbare Relation „ist Teilmenge von“ bildet eine Halbordnung**

# Beispiel "Schere-Papier-Stein"




**Die Relation "schlägt" ist nicht transitiv und daher keine Halbordnung!**

## Lineare Ordnungen

**Eine Halbordnung, die zusätzlich eine totale Relation ist, heisst lineare Ordnung oder Totalordnung.**

**Für zwei beliebige Elemente x und y aus S muss entweder xRy oder yRx gelten:**

$$\text{All } x,y\text{: } x,y \in S\text{: } (xRy) \vee (yRx)$$

**zB: die auf Personen angewandte Relation „ist nicht älter als“ bildet eine lineare Ordnung.**

**In einer linearen Ordnung sind alle Elemente miteinander vergleichbar. Lineare Ordnungen sind immer reflexiv.**

## Strenge Halbordnung

**Eine binäre Relation R $\subseteq$ S$\times$S ist eine strenge Halbordnung, wenn sie irreflexiv und transitiv ist.**

**zB: die auf Tätigkeiten anwendbare Relation "ist Voraussetzung für" bildet eine strenge Halbordnung.**

**Ebenso ist die auf Personen definierte Relation "ist älter als" eine strenge Halbordnung.**

## Beispiel "Babuschka"

**Die auf Babuschkas anwendbare Relation „passt in“ ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv und ist daher eine strenge Halbordnung.**

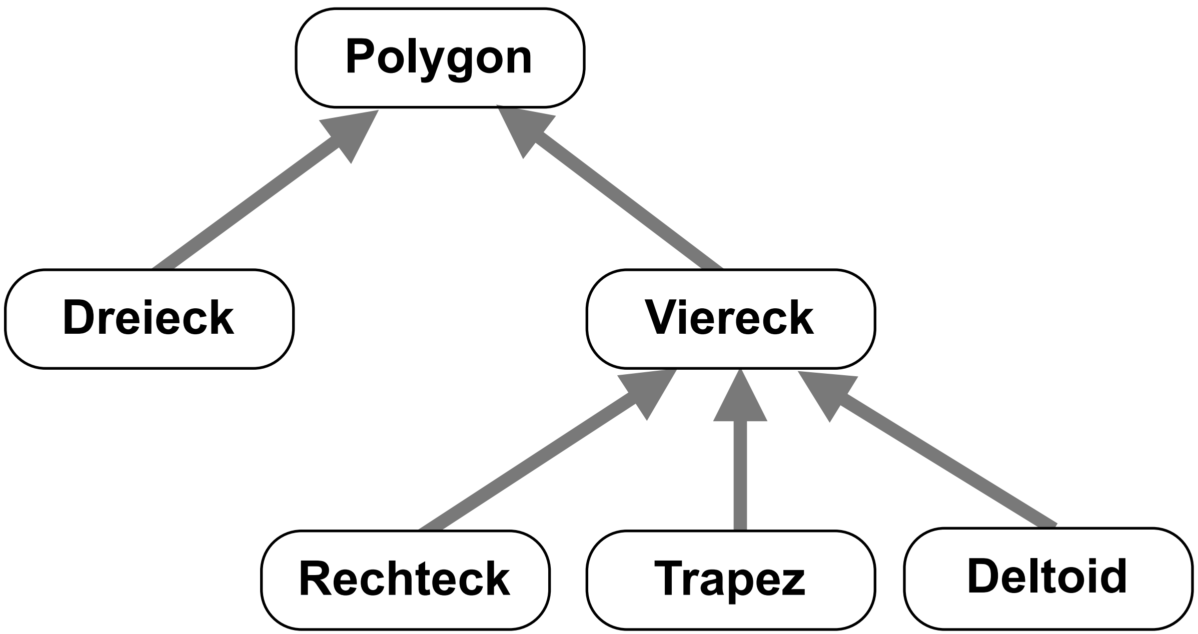
# Beispiel "Teilefamilie"

**Die auf Teile anwendbare Relation „ist Bestandteil von“ ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv und bildet eine strenge Halbordnung.**

# Beispiel "Flüsse"

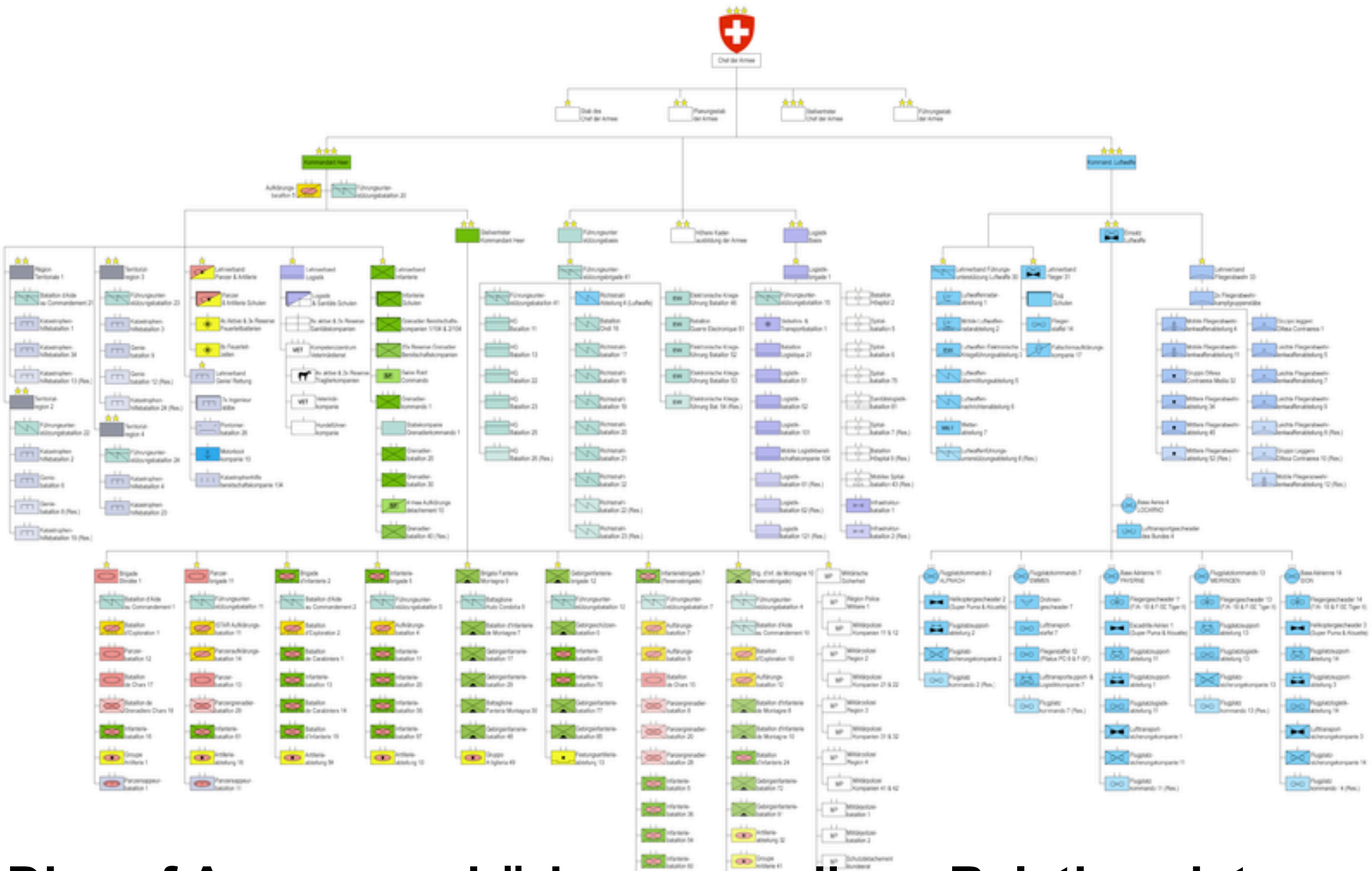

**Die auf Flüsse anwendbare Relation „fliesst in“ ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv und bildet daher eine strenge Halbordnung.**

# Beispiel "Subclassing"



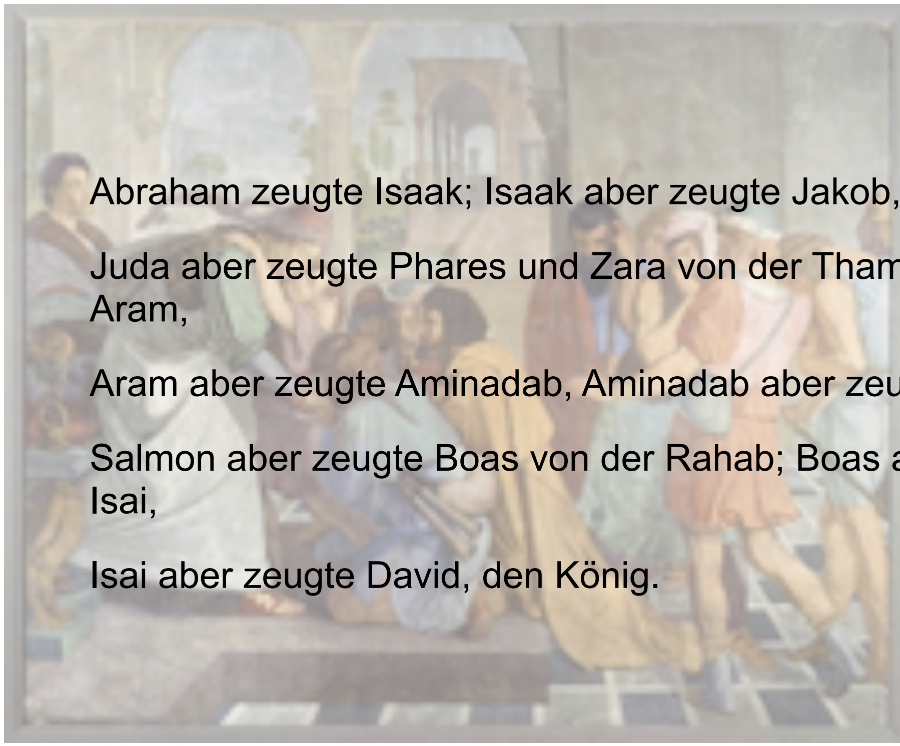

**Die auf Java Klassen anwendbare Relation „ist Subklasse von“ ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv und bildet daher eine strenge Halbordnung.**

# Beispiel "Schweizer Armee"



**Die auf Armeeangehörige anwendbare Relation „ist ranghöher als“ ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv und somit eine strenge Halbordnung.**

# Beispiel "Genesis"



Abraham zeugte Isaak; Isaak aber zeugte Jakob, Jakob aber zeugte Juda und seine Brüder;

Juda aber zeugte Phares und Zara von der Thamar; Phares aber zeugte Esrom, Esrom aber zeugte Aram,

Aram aber zeugte Aminadab, Aminadab aber zeugte Nahasson, Nahasson aber zeugte Salmon,

Salmon aber zeugte Boas von der Rahab; Boas aber zeugte Obed von der Ruth; Obed aber zeugte Isai,

Isai aber zeugte David, den König.

**Die auf Personen anwendbare Relation „ist Vorfahre von“ ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv und bildet daher eine strenge Halbordnung.**

# Äquivalenzrelationen

**Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Mengen äquivalenter Elemente bilden eine Äquivalenzklasse.**

**zB: die auf Knoten eines Graphen anwendbare Relation „ist in derselben Komponente wie“ ist eine Äquivalenzrelation, alle Knoten derselben Komponente bilden eine Äquivalenzklasse.**

# Beispiel "Zodiac"




**Die auf Personen anwendbare Relation "ist im selben Tierkreiszeichen geboren wie" ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und bildet daher eine Äquivalenzrelation.**

## Graphen und Relationen

**Ein Graph ist ein Paar (V,$\Gamma$) aus einer Menge von Knoten V und einer Relation $\Gamma \subseteq V \times V$.**

**Ist $(x,y) \in \Gamma$ so führt eine Kante von x nach y.**

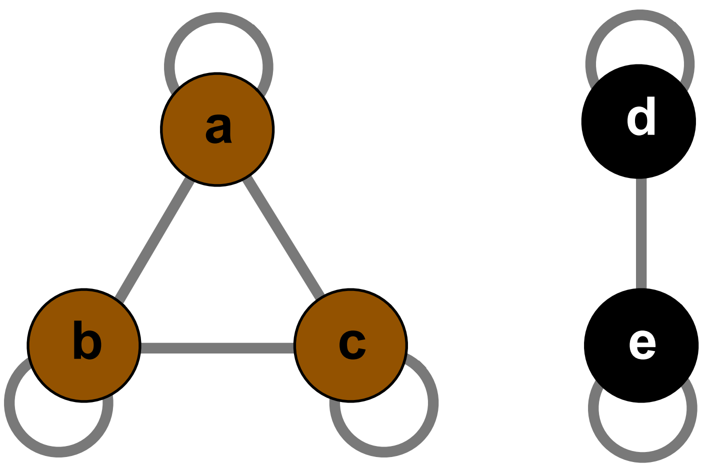
# Ungerichtete Graphen

**Ist ein Graph ungerichtet, so ist die Relation $\Gamma \subseteq V \times V$ symmetrisch:**

$$\text{All } x,y\text{: } x,y \in V\text{: } (x,y) \in \Gamma \Rightarrow (y,x) \in \Gamma$$

## Beispiel für Äquivalenzklassen

**Die Relation x <u>hat dieselbe Haarfarbe wie</u> y ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und bildet daher eine Äquivalenzrelation.**




**Alle Personen mit gleicher Haarfarbe bilden eine Äquivalenzklasse.**

# Schlaufenfreie Graphen

**Ist ein Graph schlaufenfrei, so ist die Relation $\Gamma \subseteq V \times V$ irreflexiv:**

$$\text{All } x\text{: } x \in V\text{: } (x,x) \notin \Gamma$$

# Vollständige Graphen

**Ist ein ungerichteter schlaufenfreier Graph vollständig, so gilt die Relation $\Gamma \subseteq V \times V$ für alle Knoten x und y:**

$$\text{All } x,y\text{: } x,y \in V \wedge x \neq y\text{: } (x,y) \in \Gamma$$