educational engineering lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Prädikatenlogik

Gottlob Frege 1848-1925

All-Quantor

$\forall$(i): B(i): Z(i)

All i: B(i): Z(i)

Z(i) gilt für alle i aus dem Bereich B(i)

All i: false: Z(i) = true

Beispiele

All i: $0 \le i < N$: $a_i = 0$	...	alle a_i sind Null
All i: $1 \le i < N$: $a_{i-1} < a_i$	...	a ist monoton steigend
All i,j: $0 \le i < j < N$: $a_i < a_j$	...	a ist monoton steigend
All i,j: $0 \le i,j < N$: $a_i = a_j$	...	alle Elemente von a sind gleich
All i: $0 \le i < N$: $a_i \le a_j$	...	a_j ist das grösste Element von a

Existenz-Quantor

∃(i): B(i): Z(i)

Ex i: B(i): Z(i)

Es existiert ein i im Bereich B(i) für das Z(i) gilt

Ex i: false: Z(i) = false

Beispiele

$Ex\ i: 0 \leq i < N: a_i = 0$ ... mindestens ein a_i ist Null

$not\ (Ex\ i: 1 \leq i < N: a_{i-1} \geq a_i)$ ... a ist monoton steigend

$Ex\ i,j: 0 \leq i < j < N: a_i \neq a_j$ ... mindestens zwei Elemente von a sind verschieden

De Morgan

not (Ex i: B(i): Z(i)) = All i: B(i): not Z(i)

„Es existiert kein i im Bereich B(i) für das Z(i) gilt“
ist gleichbedeutend mit
„Für alle i im Bereich B(i) gilt nicht Z(i)“

Rechenregeln

All i: B(i): (P(i) and Q(i)) $\Leftrightarrow$ (All i: B(i): P(i)) and (All i: B(i): Q(i))

Ex i: B(i): (P(i) or Q(i)) $\Leftrightarrow$ (Ex i: B(i): P(i)) or (Ex i: B(i): Q(i))

(All i: B(i): P(i)) or (All i: B(i): Q(i)) $\Rightarrow$ All i: B(i): (P(i) or Q(i))

Ex i: B(i): (P(i) and Q(i)) $\Rightarrow$ (Ex i: B(i): P(i)) and (Ex i: B(i): Q(i))

De Morgan

not (All i: B(i): Z(i)) = Ex i: B(i): not Z(i)

„Nicht für alle i im Bereich B(i) gilt Z(i)“
ist gleichbedeutend mit
„Es existiert ein i im Bereich B(i) für das Z(i) nicht gilt“

Beispiele

$(\text{Ex } i\text{: } 0 \leq i < N\text{: } a_i \neq 0) = \text{not } (\text{All } i\text{: } 0 \leq i < N\text{: } a_i = 0)$

$(\text{All } i\text{: } 1 \leq i < N\text{: } a_{i-1} < a_i) = \text{not } (\text{Ex } i\text{: } 1 \leq i < N\text{: } a_{i-1} \geq a_i)$

$(\text{Ex } i,j\text{: } 0 \leq i < j < N\text{: } a_i \neq a_j) = \text{not } (\text{All } i,j\text{: } 0 \leq i < j < N\text{: } a_i = a_j)$

Beispiel: 3 Erstplazierte

geg.: $a[0..N-1]$, $N \geq 3$

ges.: i, j, k so, dass i der Index des grössten Elementes, j der Index des zweitgrössten Elementes und k der Index des drittgrössten Elementes von a ist

Ex i,j,k: $(0 \leq i,j,k < N)$ and $(i \neq j)$ and $(i \neq k)$ and $(j \neq k)$:

$(a_i \geq a_j \geq a_k)$ and (All m: $(0 \leq m < N)$ and $(m \neq i,j,k)$: $a_k \geq a_m$)

Beispiel: Mehrdeutigkeit verbaler Zusicherungen (1)

„Alle Elemente von a sind entweder Null oder Eins“
kann interpretiert werden als

All i: $0 \leq i < N$: $(a_i=0)$ or $(a_i=1)$

oder aber als

(All i: $0 \leq i < N$: $a_i=0$) or (All i: $0 \leq i < N$: $a_i=1$)

Beispiel: Mehrdeutigkeit verbaler Zusicherungen (2)

„Die Elemente von a und b sind gleich“
kann interpretiert werden als

All i: $0 \leq i < N$: $(a_i = b_i)$	zB a=(2,3,5), b=(2,3,5)
All i: $1 \leq i < N$: $((a_i = a_{i-1})$ and $(b_i = b_{i-1}))$	zB a=(2,2,2), b=(3,3,3)
(All i: $1 \leq i < N$: $(a_i = a_{i-1})$) and (All i: $0 \leq i < N$: $(a_i = b_i)$)	zB a=(2,2,2), b=(2,2,2)
All i: $0 \leq i < N$: (Ex j: $0 \leq j < N$: $(a_i = b_j)$)	zB a=(2,3,5), b=(5,2,3)
aber auch	zB a=(2,3,3), b=(2,2,3)

Anz-Quantor

Anz i: B(i): Z(i)

liefert die Anzahl aller i aus dem Bereich B(i) für die Z(i) gilt

Anz i: false: Z(i) = 0

((Anz i: B(i): Z(i))=0) ⇔ All i: B(i): not Z(i)

((Anz i: B(i): Z(i))>0) ⇔ Ex i: B(i): Z(i)

Beispiele

$(\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i = 0) = 0$ ... alle a_i sind ungleich Null

$(\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i = x) > 0$ ... mindestens ein a_i hat den Wert x

$(\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i < x) = (\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i > x)$

... x ist der Median von a

$\text{All } x :: ((\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i = x) = (\text{Anz } i: 0 \leq i < N: b_i = x))$

... a ist eine Permutation von b

Sum-Quantor

Sum i: B(i): A(i)

liefert die Summe der Ausdrücke A(i) für alle i aus dem Bereich B(i)

Sum i: false: A(i) = 0

(Anz i: B(i): Z(i)) = (Sum i: B(i) and Z(i): 1)

Beispiele

(Sum i: $1 \leq i \leq n$: i) = $n(n+1)/2$ ... Summe der natürlichen Zahlen

(Sum i: $0 \leq i < n$: $2i+1$) = n^2 ... Summe der ungeraden Zahlen

(Sum i: $0 \leq i < n$: 2^i) = 2^n-1 ... Summe der Potenzen von 2

Min-Quantor

Min i: B(i): A(i)

liefert den kleinsten Wert der Ausdrücke A(i) für alle i aus dem Bereich B(i)

(Min i: false: A(i)) = +∞

(m=(Min i: 0≤i<N: a[i]) = ((Ex i: 0≤i<N: m=a[i]) and (All i: 0≤i<N: m≤a[i]))

Max-Quantor

Max i: B(i): A(i)

liefert den grössten Wert der Ausdrücke A(i) für alle i aus dem Bereich B(i)

(Max i: false: A(i)) = -∞

(Max i: B(i): A(i)) = (-Min i: B(i): -A(i))
(Min i: B(i): A(i)) = (-Max i: B(i): -A(i))