



educational engineering lab

Department for Information Technology
University of Zurich



Graphen

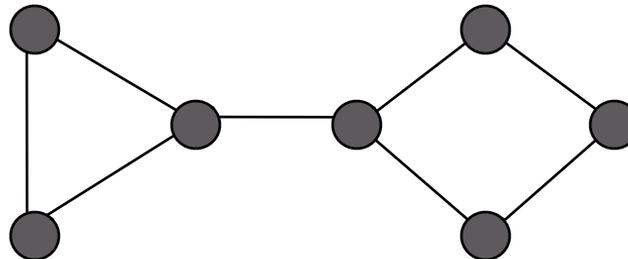


Leonhard Euler (1707-1783)

Graph

Ein Graph besteht aus Knoten (nodes, vertices) die durch Kanten (edges) miteinander verbunden sind.

zB:



Nachbarschaftsbeziehungen

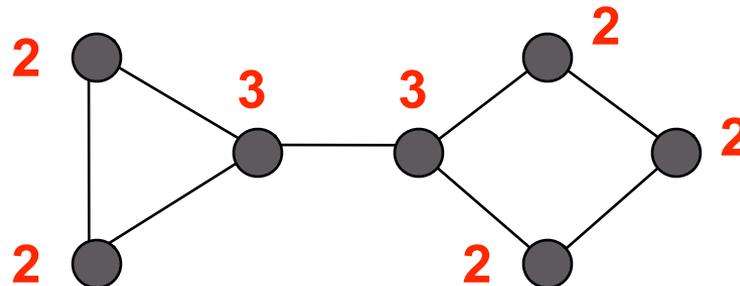
Zwei Knoten heissen adjazent (adjacent), wenn sie durch eine Kante miteinander verbunden sind.

Ein Knoten heisst inzident (incident) zu einer Kante, wenn der Knoten Eckpunkt dieser Kante ist.

Grad eines Knotens

Die Anzahl der Kanten, für die ein Knoten inzident ist bezeichnet man als **Grad (degree)** dieses Knotens.

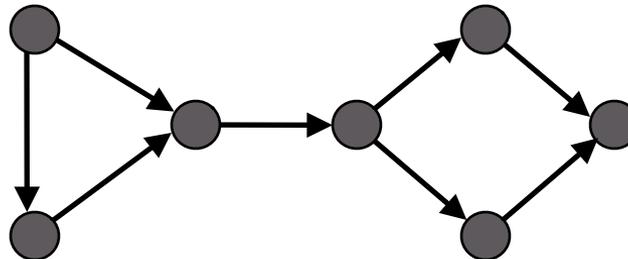
zB:



Gerichtete Graphen

Ein Graph heisst gerichtet (directed), wenn seine Kanten eine Orientierung (von einem Knoten zu einem Knoten) aufweisen. Ein gerichteter Graph wird auch als Digraph (directed graph) bezeichnet.

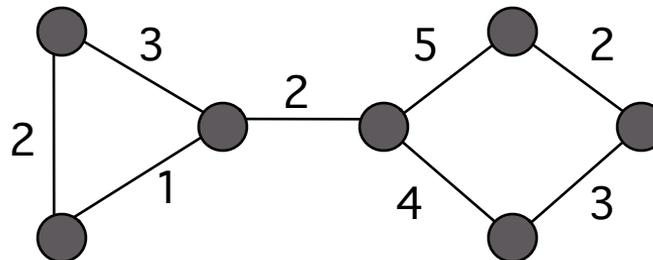
zB:



Gewichtete Graphen

Ein Graph heisst gewichtet (weighted), wenn seinen Kanten Attribute (Gewichte) zugeordnet sind.

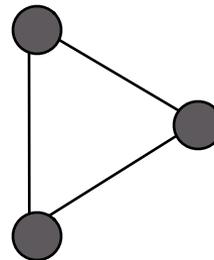
zB: Entfernungen in einem Ortsnetz



Vollständige Graphen

Ein Graph heisst vollständig (complete), wenn eine Kante von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten führt.

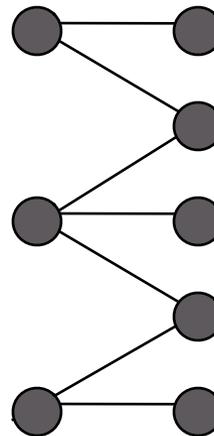
zB:



Bipartite Graphen

Ein Graph heisst bipartit (bipartite), wenn Kanten nur Knoten aus zwei disjunkten Teilmengen miteinander verbinden.

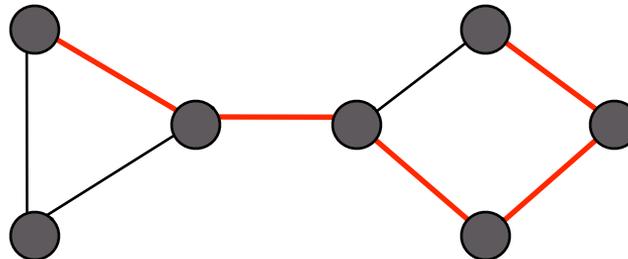
zB:



Pfade

Eine Folge von n Kanten, die zwei Knoten miteinander verbinden, wird als Weg oder Pfad (path) der Länge n bezeichnet.

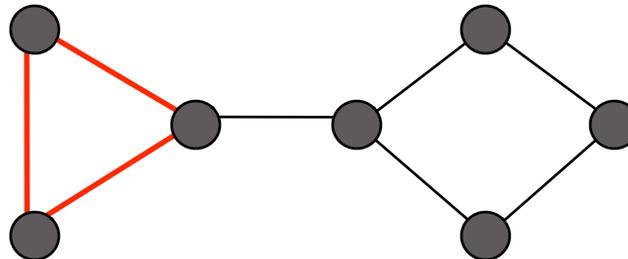
zB Pfad der Länge $n=5$:



Zyklen

Ein geschlossener Pfad, der zu seinem Startknoten zurückführt und eine Länge $n \geq 3$ hat, ist ein Zyklus (cycle).

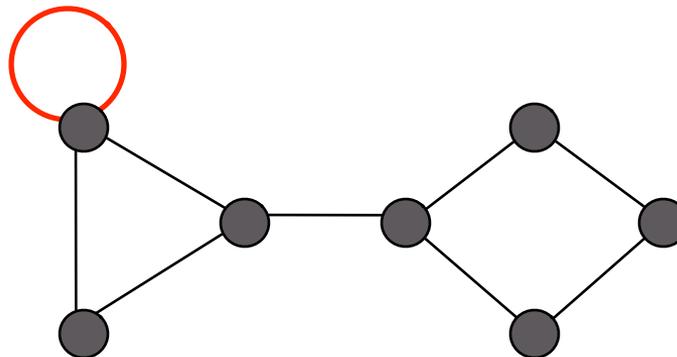
zB Zyklus der Länge $n=3$:



Schlaufen

Eine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet heisst Schlaufe (loop).

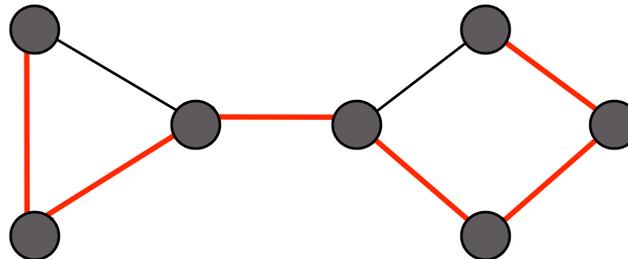
zB:



Hamilton-Pfad

In einem Hamilton-Pfad wird jeder Knoten des Graphen genau einmal durchlaufen.

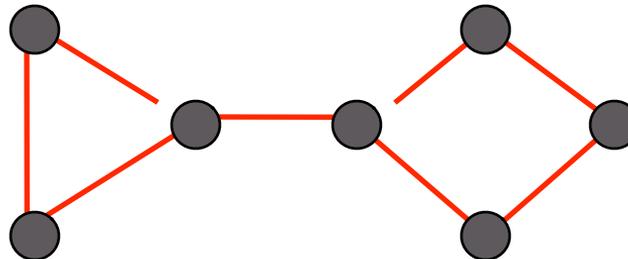
zB:



Euler-Pfad

In einem Euler-Pfad ist jede Kante des Graphen genau einmal enthalten.

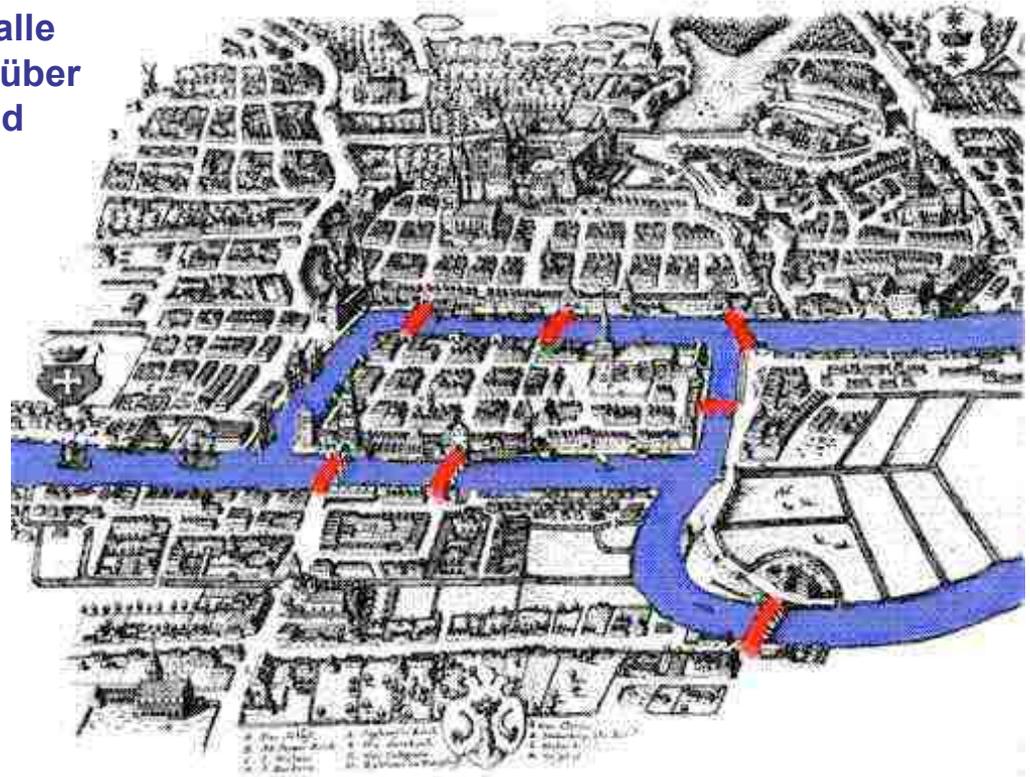
zB:



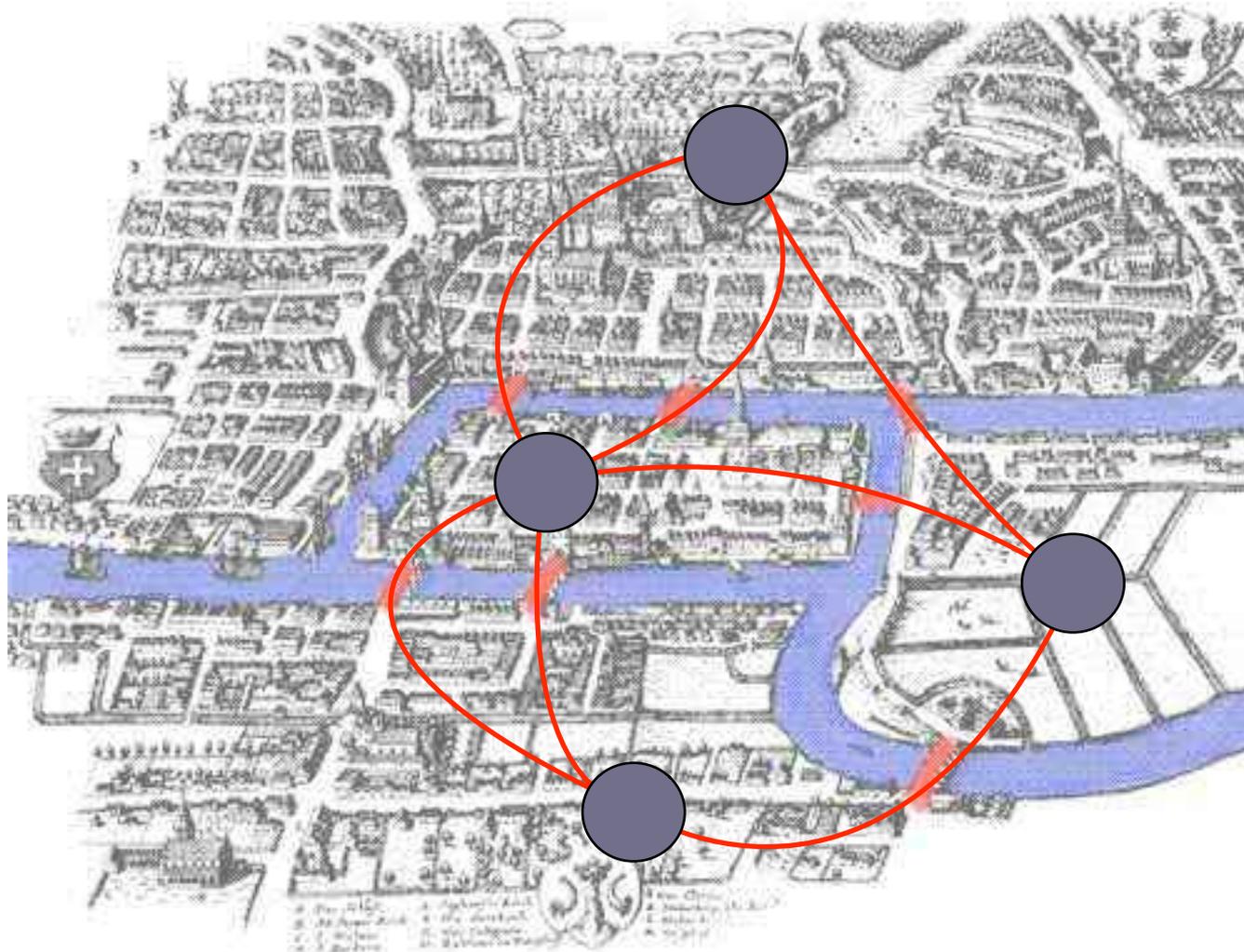
Brücken von Königsberg

Königsberger Brückenproblem (Leonhard Euler 1736):

Gibt es einen Rundweg, bei dem man alle sieben Brücken der Stadt Königsberg über den Pregel genau einmal überquert und wieder zum Ausgangspunkt gelangt?



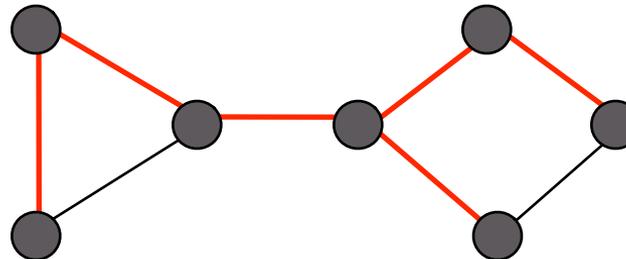
Brücken von Königsberg



Spannender Baum

Ein spannender Baum (spanning tree) eines Graphen verbindet alle Knoten durch eine zyklensfreie Teilmenge aller Kanten.

zB:

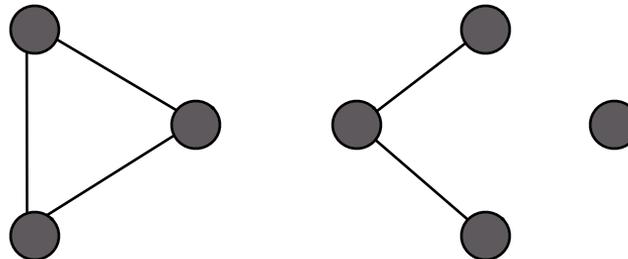


Komponenten

Eine Komponente (component) ist ein zusammenhängender Teil eines Graphen.

Ein Graph kann aus mehreren Komponenten bestehen.

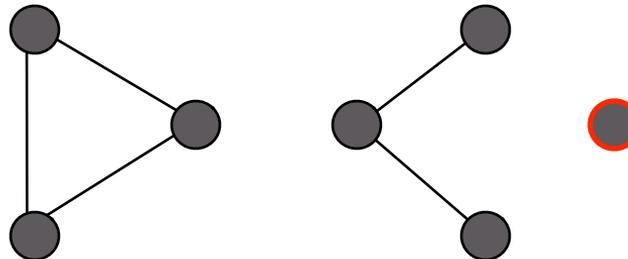
zB: Graph mit 3 Komponenten



Isolierter Knoten

Ein Knoten heisst isoliert (isolated), wenn er der einzige Knoten einer Komponente ist.

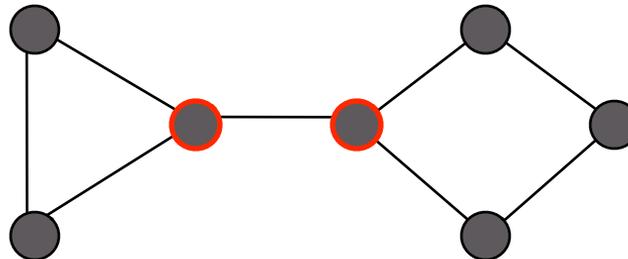
zB: Graph mit einem isolierten Knoten



Kritische Knoten

Ein Knoten eines Graphen ist genau dann kritisch (critical), wenn durch seine Entfernung der Graph in mehrere Komponenten zerfällt.

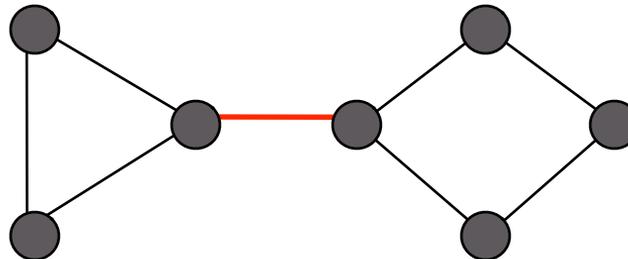
zB:



Kritische Kanten

Eine Kante eines Graphen ist genau dann kritisch, wenn durch ihre Entfernung der Graph in mehrere Komponenten zerfällt.

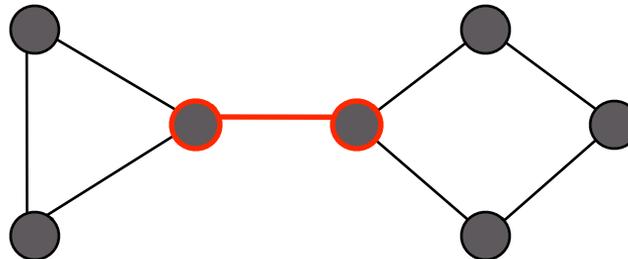
zB:



Artikulationspunkte

Kritische Kanten und kritische Knoten werden gemeinsam auch als Artikulationspunkte (articulation points) eines Graphen bezeichnet.

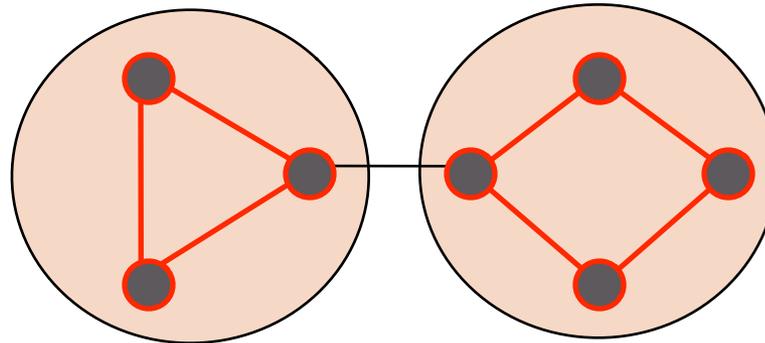
zB:



Zweifacher Zusammenhang

Eine Komponente eines ungerichteten Graphen ist zweifach zusammenhängend (biconnected), wenn nach Entfernen eines beliebigen Knotens die verbleibenden Knoten zusammenhängend sind.

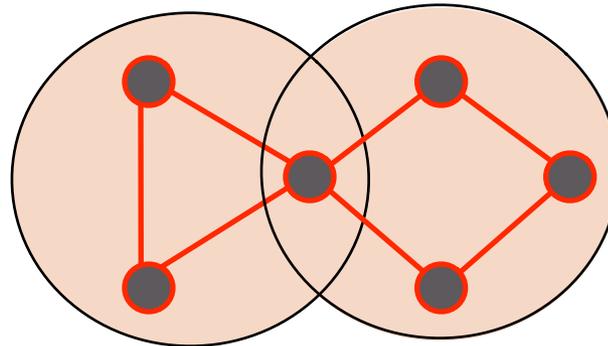
zB:



Beispiel: Zweifacher Zusammenhang

Achtung: Kritische Knoten können auch in mehreren zweifach zusammenhängenden Komponenten enthalten sein!

zB:



Schwacher Zusammenhang

In einem Digraphen ist ein Knoten y von einem Knoten x aus schwach erreichbar, wenn es einen ungerichteten Pfad von x nach y gibt.

Eine Komponente eines Digraphen ist schwach zusammenhängend (weakly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus schwach erreichbar ist.

Starker Zusammenhang

In einem Digraphen ist ein Knoten y von einem Knoten x aus stark erreichbar, wenn es einen gerichteten Pfad von x nach y gibt.

Eine Komponente eines Digraphen ist stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus stark erreichbar ist.

zB 5 stark zusammenhängende Komponenten eines Digraphen:

