5 Graphen

5.1 Elementare Definitionen

Ein Graph ist *anschaulich* eine Zeichnung aus Strichen und Punkten, wobei die Striche je 2 Punkte verbinden und noch Pfeilspitzen zur Orientierung tragen können. Mathematisch-formal gesprochen ist diese Definition wertlos: Was ist eine "Zeichnung"? Was sind "Striche"? Sind nur gerade oder auch krumme "Striche" zugelassen? Was sind "Punkte"? Mathematisch-intuitiv gesprochen ist diese Definition jedoch sehr gut.

Die zentralen *Ideen* des Graphenkonzepts sind also *Eckpunkte (Knoten, Ecken, Punkte; nodes, points, vertices, aber nicht: edges)*, und *Verbindungskanten (edges)*. Zu jeder Kante gibt es *zwei Punkte*, die durch diese Kante verbunden werden.

Entscheidungen, die zu unterschiedlichen Definitionen von "Graphen" führen:

(1) GERICHTETE – UNGERICHTETE KANTEN.
Wenn ich eine Kante betrachte, so weiß ich, welche zwei Punkte sie verbindet. Bei den *gerichteten Kanten (directed edges)* von *Digraphen* kann man unterscheiden, welcher Punkt der Anfangspunkt und welcher der Endpunkt einer Kante ist, ich kann der Kante also eine Richtung geben. Bei *ungerichteten Kanten (undirected edges)* von *Graphen* ist dies nicht möglich.

(2) MEHRFACHKANTEN – EINFACHKANTEN.
Bei *Multigraphen* können zwischen zwei Punkten *mehrere Kanten (Mehrfachkanten; multiple edges)* verlaufen, bei Graphen jeweils höchstens eine.

(3) SCHLAUFEN.
Ein Graph hat *Schlaufen (Schleifen; loops)*, wenn es Kanten gibt, die einen Punkt mit sich selber verbinden.

Graphen haben in der Informatik und anderen Wissenschaften eine extrem große Bedeutung: Flußdiagramme, Fahrpläne und Flugpläne, Computernetzwerke, Datenflußgraphen, PETRI–Netze, Entity–Relationship–Diagramme, elektrische Schaltpläne, integrierte Schaltungen, chemische Strukturformeln, Straßenkarten, Projektablaufpläne, semantische Netze, Zuteilungsgraphen, Kompatibilitätsgraphen, Status–Übergangs–Diagramme, Syntaxdiagramme von Computersprachen und Entscheidungsbäume können alle durch Graphen beschrieben werden.

Je nachdem, welche der oben angeführten Eigenschaften modelliert werden sollen, erhält man stark unterschiedliche Definitionen von Graphen. Man hat deshalb oft das Gefühl, in der Literatur finde sich ein Dschungel inkonsistenter Definitionen. Konzentriert man sich aber nicht auf den Formalismus, sondern auf die wesentlichen inhaltlichen Aspekte, so lichtet sich dieser Dschungel beträchtlich.

145 Definition GRAPHEN
Konzept: Ungerichtete Einfachkanten, keine Schlaufen.

Ein *Graph (graph)* ist ein Paar (E, V) aus einer Menge E von *Eckpunkten* und einer Menge V von *zweielementigen Teilmengen* von E. Sind $e_1, e_2 \in E$ zwei Eckpunkte und ist die Menge $\{e_1, e_2\}$ Element der Menge V, so bedeutet das, daß eine Kante die (voneinander unterschiedlichen) Eckpunkte e_1 und e_2 verbindet. Da es bei Mengen nicht auf die Reihenfolge ankommt, also $\{e_1, e_2\} = \{e_2, e_1\}$ gilt, kann keine Richtungsinformation abgelesen werden.

Eine andere, äquivalente Definition lautet: Ein *Graph* ist ein Paar (E, Γ) aus einer Menge E von *Eckpunkten* und einer *symmetrischen, irreflexiven Relation* $\Gamma \subseteq E \times E$ auf E. Sind $e_1, e_2 \in E$ zwei Eckpunkte und ist $(e_1, e_2) \in \Gamma$, dann sind e_1 und e_2 durch eine Kante verbunden. Aufgrund der Symmetrie der Relation Γ kann keine Richtungsinformation abgelesen werden.

146 Definition DIGRAPHEN
Konzept: Gerichtete Einfachkanten, keine Schlaufen.

Ein *Digraph (gerichteter Graph, directed graph, digraph)* ist ein Paar (E, Γ) aus einer Menge E von *Eckpunkten* und einer *irreflexiven Relation* $\Gamma \subseteq E \times E$ auf E. Sind also $e_1, e_2 \in E$ zwei Eckpunkte und ist das geordnete Paar (e_1, e_2) in Relation, so führt eine gerichtete Kante vom Punkt e_1 als Anfangspunkt zum Punkt e_2 als Endpunkt. Das gespiegelte Paar (e_2, e_1) ist nicht notwendigerweise in der Relation.

147 Definition UNGERICHTETE MULTIGRAPHEN
Konzept: Ungerichtete Mehrfachkanten, keine Schlaufen.

Ein *ungerichteter Multigraph* ist ein Tripel (E, V, α) aus einer Menge E von *Eckpunkten*, einer Menge V von *Verbindungskanten* und einer *Abbildung* α von V in die Menge der zweielementigen Teilmengen von E. Ist also $v \in V$ eine Verbindungskante und $\alpha(v) = \{e_1, e_2\}$ mit $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$, so bedeutet das, daß die Kante v die

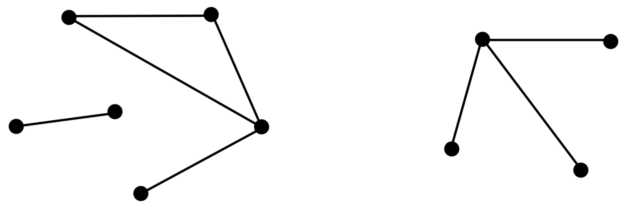

Abb. 1 Graph und Digraph.

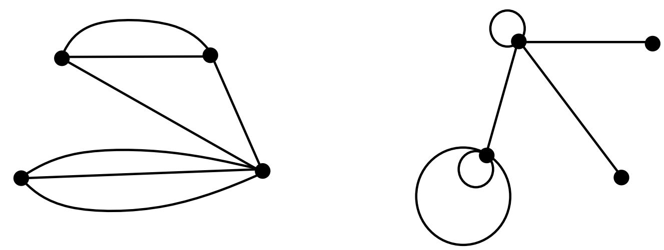

Abb. 2 Multigraphen ohne und mit Schlaufen.

voneinander unterschiedlichen Eckpunkte e_1 und e_2 verbindet. Wie in Definition **??** kann keine Richtungsinformation abgelesen werden.

148 Definition GERICHTETE MULTIGRAPHEN MIT SCHLAUFEN
Konzept: Gerichtete Mehrfachkanten, Schlaufen sind möglich.

Ein *gerichteter Multigraph mit Schlaufen* ist ein Tripel (E, V, α) aus einer Menge E von *Eckpunkten*, einer Menge V von *Verbindungskanten* und einer *Abbildung* $\alpha : V \to E \times E$ von V in die Menge $E \times E$ der geordneten Paare von Eckpunkten. Ist also $v \in V$ eine Verbindungskante und $\alpha(v) = (e_1, e_2)$ mit $e_1, e_2 \in E$, so bedeutet das, daß die Kante v die Eckpunkte e_1 und e_2 verbindet und die Kante insbesondere von e_1 nach e_2 geht. v ist eine *Schlaufe beim Eckpunkt* e, falls $\alpha(v) = (e, e)$.

149 Definition GRAD EINES ECKPUNKTES
In jedem der obigen Graphenkonzepte bezeichnet man die Anzahl Kanten, die im Zusammenhang mit einem Eckpunkt auftreten, als den *Grad (degree)* dieses Eckpunktes. Wir wollen im Folgenden stets annehmen, daß ein Graph nur endlich viele Eckpunkte und Verbindungskanten besitzt.

5.2 Spezielle Graphen

150 Definition VOLLSTÄNDIGE GRAPHEN
Ein Graph heißt *vollständig (complete)*, wenn jede theoretisch mögliche Verbindungskante tatsächlich eine Verbindungskante ist, wenn also je zwei verschiedene[1] Punkte durch eine Verbindungskante verbunden sind: $\forall x, y \in E, x \neq y : (x, y) \in \Gamma$.

Ist $n \in \mathrm{N}$ eine natürliche Zahl, dann bezeichnet K_n den vollständigen Graphen (E, Γ) mit n Eckpunkten. Eigentlich gibt es ja mehrere solche Graphen, je nach Bezeichnung der Eckpunkte, "im wesentlichen" sehen diese Graphen aber "gleich aus". Eine präzisere Definition davon geben wir etwas später.

151 Definition BIPARTITE GRAPHEN
Ein Graph (E, V) heißt ein *bipartiter (bipartite)* Graph, wenn die Menge seiner Eckpunkte so in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen A und B zerlegt werden kann, daß jede Kante einen Eckpunkt in A mit einem Eckpunkt in B verbindet: Es führt also keine Kante von A nach A oder von B nach B. $\{A, B\}$ ist in diesem Fall eine Partition der Menge E der Eckpunkte und heißt eine *Bipartition (bipartitioning)* des Graphen (E, V). Formal: $E = A \cup B$ mit $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ und $\forall v \in V : \#(v \cap A) = \#(v \cap B) = 1$.

Ein Graph (E, V) heißt ein *vollständiger bipartiter (complete bipartite)* Graph, wenn die Menge seiner Eckpunkte in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen A und B zerlegt werden kann, daß die Menge seiner Kanten genau aus der Menge aller Kanten, die zwischen A und B möglich sind, besteht. Formal: $E = A \cup B$ mit $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ und $V = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Zu je zwei natürlichen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathrm{N}$ gibt es "im wesentlichen" genau einen vollständigen bipartiten Graphen, dessen Eckpunktmenge in eine Menge A mit α Elementen und eine Menge B mit β Elementen partitioniert werden kann. Dieser Graph wird mit $K_{\alpha,\beta}$ bezeichnet.

152 Definition ZUORDNUNGEN
Sei (E, V) ein bipartiter Graph mit Bipartition (A, B). Welche Situationen wechselseitiger Zuordnungen von Elementen in A zu Elementen in B sind möglich?

Eine *Zuordnung (matching)* ist eine Menge $M \subseteq V$ von Kanten mit paarweise verschiedenen Endpunkten: $\forall v_1, v_2 \in M, v_1 \neq v_2 : v_1 \cap v_2 = \emptyset$. Anschaulich ist die Menge M von Kanten eine Beschreibung von Zuordnungen – jede Kante ist ja eine solche Zuordnung – die gleichzeitig und konfliktfrei möglich sind. Jedem Element

[1] Wir sprechen ja von Graphen und nicht von Graphen mit Schlaufen.

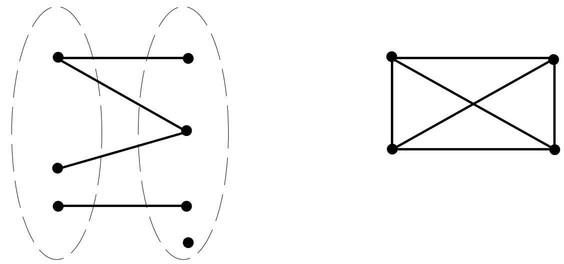

Abb. 3 Bipartiter und vollständiger Graph.

von A, das in der Zuordnung auftaucht, ist nur ein Element von B zugeordnet, und umgekehrt.

Eine Zuordnung heißt *vollständig (complete) für die Menge* A, wenn jedes Element $a \in A$ in einer und somit in genau einer Kante der Zuordnung auftaucht: $\forall a \in A : \exists v \in M : a \in v$. Anschaulich bedeutet das eine Zuordnung, in der *jedem* Element der Menge A ein Element der Menge B zugeordnet wird. In der formalen Definition kann statt $\exists$ auch $\exists_1$ stehen. Die Eindeutigkeit wird ja bereits durch die Tatsache garantiert, daß es sich um eine Zuordnung handelt.

Eine Zuordnung heißt *perfekt (perfect)*, wenn sie für beide Mengen vollständig ist.

153 Theorem EXISTENZ VON ZUORDNUNGEN
In einem bipartiten Graphen (E, V) mit Bipartition (A, B) gibt es

(1) eine für A *vollständige Zuordnung* genau dann, wenn es für jede Teilmenge $C \subseteq A$ von A mindestens $\#(C)$ Elemente in B gibt, die mit den Elementen in C über die Kanten des Graphen verbunden sind.

(2) eine *perfekte Zuordnung* genau dann, wenn es für jede Teilmenge $C \subseteq A$ von A mindestens $\#(C)$ Elemente in B gibt, die mit den Elementen in C über die Kanten des Graphen verbunden sind, und A und B gleich viele Elemente haben.

154 Beispiel VERGABE VON BETRIEBSMITTELN
In einem Rechenzentrum stehen vier Bandstationen. Station 1 kann Bänder hoher und niedriger Schreibdichte lesen, Station 2 Bänder hoher und mittlerer Schreibdichte, die Stationen 3 und 4 sind älter und können nur Bänder niedriger Schreibdichte lesen. Alle vier Stationen sind unbelegt. Dem Betriebssystem liegen folgende vier Anforderungen für Betriebsmittel vor: Prozeß A will eine Bandstation für high density, Prozeß B eine Bandstation für low density, Prozeß C will von einem high-density Band lesen und anschließend auf ein low-density Band schreiben, möchte

also eine Station, die beide Dichten lesen kann, Prozeß D letztlich will zuerst Eingaben von einem medium-density Band lesen und dann das Programm von einem high-density Band einlesen.

(1) Welche graphentheoretische Struktur eignet sich am besten zur Modellierung dieser Situation?

(2) Ist eine Vergabe von Betriebsmitteln möglich, bei der kein Prozeß warten muß? Wenn ja, wie sieht diese aus, wenn nein, warum nicht?

(3) In welchem Zusammenhang steht die Vergabe von Betriebsmitteln mit dem bekanntesten Problem der Zuordnungstheorie, dem in der Folge dargestellten Heiratsproblem?

155 Beispiel HEIRATSPROBLEM
Sei B eine Menge von Buben und M eine Menge von Mädchen. B und M sind natürlich disjunkt. Für jeden Buben $b \in B$ ist die Menge M_b die Menge aller Mädchen, die er kennt. Jeder Bub kann mit einem Mädchen, das er kennt, verheiratet werden, genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jeder Menge $C \subseteq B$ von Buben ist $\#(\bigcup_{b\in C} M_b) \geq \#(C)$.

Genauer: Zu jedem Bub gibt es genau ein Mädchen, das er heiratet. Ein Mädchen kann von höchstens einem Bub geheiratet werden. Jeder Bub heiratet, Mädchen dürfen aber ledig bleiben.

Beweisen Sie das Kriterium unter Anwendung des Theorems über die Existenz von Zuordnungen.

Diese Fragestellung kann auch anders formuliert werden und ist dann für den Informatiker von Bedeutung: Sei B eine Menge von Informatikanwendungen und M eine Menge von Rechnern. Für jede Anwendung $b \in B$ bezeichne M_b die Menge der Rechner, auf denen diese Anwendung laufen kann. Unter welcher Voraussetzung kann man jeder Anwendung genau einen Rechner zuordnen, ohne daß Multitasking mehrerer Anwendungen auf einem Rechner erforderlich wäre?

156 Definition ZYKLEN UND ZÖPFE
Ein *Zyklus (cycle)* der Ordnung $n \in \mathrm{N}$ ist ein Graph (E, Γ) aus n Eckpunkten mit $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ und $\Gamma =< \{(e_1, e_2), (e_2, e_3), \ldots, (e_{n-1}, e_n), (e_n, e_1)\} >_s$. Zu jedem $n \in \mathrm{N}$ gibt es "im wesentlichen" genau einen Zyklus Z_n der Ordnung n. Das ist der Graph (E, V) mit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $V = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$.

Sei (E, Γ) ein Zyklus der Ordnung n. Dann ist (E, Γ_2) mit $\Gamma_2 \subseteq E \times E$ und $\Gamma_2 := \Gamma \cup (\Gamma \circ \Gamma)$ ein *Zopf der Ordnung n zum Verzopfungsgrad 2*. Insbesondere ist $(x, y) \in \Gamma_2$ genau dann, wenn $(x, y) \in \Gamma$ oder wenn ein $z \in E$ existiert mit $(x, z) \in \Gamma$ und $(z, y) \in \Gamma$.

Allgemein ist der Graph (E, Γ_n) mit $\Gamma_n \subseteq E \times E$ und $\Gamma_n = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 \cup \cdots \cup \Gamma^n$, wobei hier mit Γ^k die k–fache Ausführung der Komposition der Relation Γ mit sich selbst gemeint ist, ein *Zopf der Ordnung n zum Verzopfungsgrad k*.

157 Beispiel ZÖPFE DER ORDNUNG 5
Betrachten Sie alle Zöpfe der Ordnung 5: Geben sie E und $\Gamma \subseteq E \times E$ für einen Zyklus der Ordnung 5 an, und zeichnen Sie diesen Graph. Bestimmen Sie die Relation Γ_2 nach obiger Definition durch Komposition der Relationen. Zeichnen Sie den Zopf der die Ordnung 5 und den Verzopfungsgrad 2 besitzt. Ist der sich ergebende Graph der vollständige Graph der Ordnung 5? Warum? Bestimmen Sie die Relationen $\Gamma_3, \Gamma_4, \ldots$ nach obiger Definition. Was sind das für Graphen?

158 Beispiel VERZOPFUNG VON ZYKLEN
Beginnend mit einem Zyklus der Ordnung n werden Zöpfe der Ordnung n von immer höherem Verzopfungsgrad betrachtet: Überlegen und begründen Sie, weshalb ab einem gewissen Verzopfungsgrad k alle Zöpfe der Ordnung n gerade die vollständigen Graphen der Ordnung n sind. Geben Sie für $n = 4, 5, \ldots, 10$ diesen kleinsten "vollständigen" Verzopfungsgrad an. Geben Sie eine allgemeine Formel für diesen kleinsten Verzopfungsgrad an, und begründen Sie diese.

159 Definition HYPERWÜRFEL
Der *Hyperwürfel (hypercube) der Dimension n* ist der Graph (E, Γ), $E = \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ und $(x, y) \in \Gamma$ genau dann, wenn sich die Darstellung von x und y als Binärzahl in genau einem Bit unterscheidet.

160 Beispiel HYPERWÜRFEL
Untersuchen Sie die Struktur des Hyperwürfels näher:

(1) Zeichnen Sie für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ den Graphen (E, Γ) des Hyperwürfels auf.

(2) Wenn x und y zwei Eckpunkte eines Hyperwürfels sind, dann heißt die minimale Länge der möglichen Verbindungswege von x nach y der *Abstand* von x und y. Zeigen Sie, daß der maximale Abstand zweier Eckpunkte im Hyperwürfel gleich der Dimension des Hyperwürfels ist.

(3) Seien x und y zwei Eckpunkte eines Hyperwürfels. Wie kann man den Abstand von x und y unmittelbar aus der Binärdarstellung von x und y ablesen?

(4) Falls X und Y zwei gleich lange Zeichenketten sind, dann heißt die Anzahl der Positionen, an denen unterschiedliche Zeichen stehen, der HAMMING–*Abstand* dieser Zeichenketten. Berechnen Sie den HAMMING–Abstand der Zeichenketten 0100 und 0011. In welchem Zusammenhang steht der HAMMING–Abstand mit dem Abstand von Eckpunkten im Hyperwürfel?

(5) Seien x und y zwei Eckpunkte eines Hyperwürfels im Abstand d. Wieviele unterschiedliche Verbindungswege minimaler Länge gibt es zwischen x und y ? Untersuchen Sie das zuerst an Beispielen, und stellen Sie dann eine allgemeine Formel auf. Benutzen Sie dazu Aufgabe (3). Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion für Hyperwürfel beliebiger Dimension und für beliebiges d.

(6) Sie sind Postbote in einem Hyperwürfel und sollen einen Brief von einem Punkt x zu einem Punkt y transportieren. Anstelle einer Straßenkarte haben Sie nur die Adressen x und y in Binärdarstellung gegeben. Wie finden Sie rasch einen Weg minimaler Länge zum Zielpunkt? Betrachten Sie wiederum zuerst ein konkretes Beispiel, und formulieren Sie dann eine allgemeine Regel.

161 Bemerkung HYPERWÜRFEL ALS VERBINDUNGSSTRUKTUR
Hyperwürfel werden sehr gerne als Verbindungsstruktur in Multiprozessorsystemen eingesetzt, etwa beim "Intel Hypercube" oder in der "Connection Machine CM–2". Die Knoten sind dabei Rechner, die Verbindungskanten sind Kommunikationskanäle. Die Verbindungsstruktur eines Hyperwürfels weist folgende angenehme Eigenschaften auf:

Der Hyperwürfel hat eine *hohe Konnektivität:* Der maximale Abstand zwischen zwei Knoten ist auch bei einer größeren Anzahl von Knoten relativ klein. Er gestattet eine *hohe Datenrate*, da es zwischen zwei Knoten eine große Anzahl von Verbindungswegen minimaler Länge gibt. Ist ein Weg stärker belastet, so kann ein anderer gewählt werden. Die Binärdarstellung von Start- und Zieladresse ergibt unmittelbar eine Vorschrift, entlang welcher Wege Datenpakete zum Ziel versandt werden müssen. Die *Routing Algorithmen*, welche die Verlieferung von Datenpaketen übernehmen, können somit *sehr einfach* gehalten werden. Aufgrund der hohen Anzahl von Verbindungswegen gibt es auch nach Ausfall von Verbindungsleitungen und Knotenrechnern mit hoher Wahrscheinlichkeit immer noch eine Möglichkeit, Daten an ihr Ziel zu transportieren. Das Verbindungsnetz weist also eine *hohe Fehlertoleranz* auf. Die Struktur des Netzes ist *homogen*: Die Rechner können aufgrund ihrer Position im Verbindungsnetz nicht voneinander unterschieden werden – im Gegensatz etwa zum Baum, bei dem es Blätter, Wurzeln und unterschiedliche Niveaus gibt. Somit können bei der Programmentwicklung alle Rechner gleich programmiert werden.

Nachteilig sind beim *Hyperwürfel* der hohe *Verdrahtungsaufwand* und die schlechte *Erweiterbarkeit*: Will man einen Hyperwürfel vergrößern, so muß man die Zahl seiner Eckpunkte verdoppeln.

5.3 Isomorphe Graphen

In diesem Abschnitt wollen wir das Konzept der *Strukturgleichheit (Isomorphie)* am Beispiel von Graphen kennenlernen.

162 Definition ISOMORPHIE VON GRAPHEN
Zwei Graphen (E_1, Γ_1) und (E_2, Γ_2) heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : E_1 \to E_2$ mit folgender Eigenschaft gibt: Zwei Eckpunkte $x, y \in E_1$ sind genau dann (im ersten Graphen) verbunden, wenn ihre Bilder $f(x), f(y) \in E_2$ (im zweiten Graphen) verbunden sind: $\forall x, y, \in E_1 : (x, y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in \Gamma_2$.

Da es sich um ungerichtete Graphen handelt, wäre es ganz gleich, wenn wir $\forall x, y, \in E_1 : (x, y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow (f(y), f(x)) \in \Gamma_2$ geschrieben hätten, auf die Reihenfolge kommt es hier nicht an.

Zwei Graphen sind also genau dann isomorph, wenn sie bis auf *Umbenennung ihrer Eckpunkte* gleich sind. Die Funktion f bewerkstelligt diese Umbenennung. Mit Wendungen der Art "es gibt *im wesentlichen* genau einen Zyklus der Ordnung n", war gemeint "es gibt *bis auf Isomorphie* genau einen Zyklus der Ordnung n".

Ganz allgemein bedeutet das *Konzept der Isomorphie* die *Abstraktion von unwesentlichen Details*. Es kann für praktisch alle mathematischen Objekte in geeigneter Form definiert werden. Die Kategorientheorie und die universelle Algebra sind komplizierte Teilbereiche der Mathematik, die sich zentral mit Fragen der Struktur und der Struktur–Isomorphie beschäftigen. Ihre große Bedeutung für die Informatik und die Konzeption von Programmiersprachen ist erst seit wenigen Jahren bekannt.

163 Definition ISOMORPHIE VON DIGRAPHEN
Zwei Digraphen (E_1, Γ_1) und (E_2, Γ_2) heißen *isomorph (isomorph)*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : E_1 \to E_2$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Im ersten Graphen führt von einem Eckpunkt x genau dann eine Kante zu einem Eckpunkt y, wenn auch im zweiten Graphen vom Eckpunkt $f(x)$ eine Kante zum Eckpunkt $f(y)$ führt: $\forall x, y \in E_1 : (x, y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in \Gamma_2$.

Zwei Digraphen sind also genau dann isomorph, wenn sie bis auf *Umbenennung ihrer Eckpunkte* gleich aussehen. Insbesondere muß auch auf den Richtungssinn der

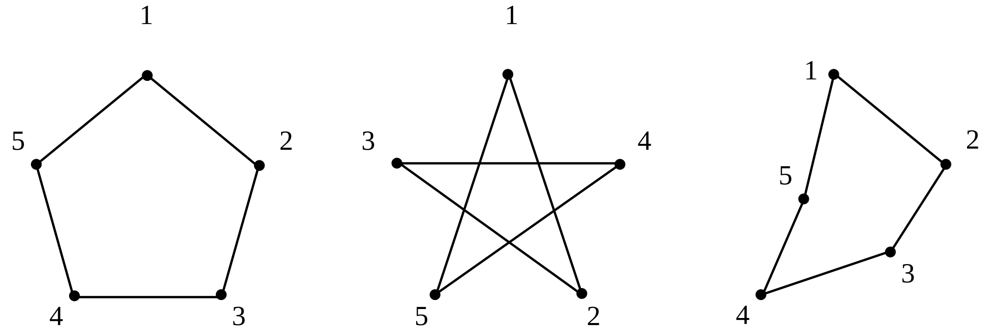

Abb. 4 Drei paarweise isomorphe Graphen.

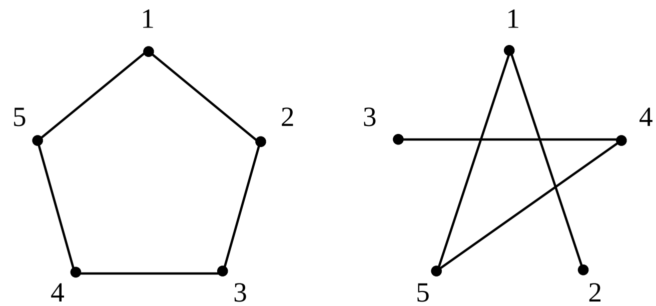

Abb. 5 Zwei nichtisomorphe Graphen.

Kanten geachtet werden.

164 Definition TEILGRAPHEN
Ein Graph (E', Γ') heißt ein *Teilgraph (subgraph)* eines Graphen (E, Γ) genau dann, wenn $E' \subseteq E$ und $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ist.

5.4 Verbindungen in Graphen

165 Definition WEGE IN GRAPHEN
Ein *Weg (path)* in einem Graphen ist ein n–Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$, von Eckpunkten $x_i \in E$, bei dem x_1x_2, x_2x_3, $\ldots$ $x_{n-1}x_n$, also alle x_ix_{i+1} für $i = 1, 2, n-1$, Verbindungskanten sind. Letzteres bedeutet in der (E, V) Graphendefinition, daß $\{x_i, x_{i+1}\} \in V$ und in der (E, Γ) Graphendefinition, daß $(x_i, x_{i+1}) \in \Gamma$. $n-1$ heißt die *Länge (length)* dieses Weges, x_1 sein *Anfangspunkt* und x_n sein *Endpunkt*.

Ein Weg heißt *geschlossen (closed)*, wenn sein Anfangspunkt x_1 gleich seinem Endpunkt x_n ist, und *offen (open)*, wenn er nicht geschlossen ist.

Ein Weg heißt EULER*sch*[2] *(*EULER*ian)*, wenn jede *Verbindungskante* des Graphen genau einmal in diesem Weg auftaucht.

[2] Nach dem Mathematiker LEONHARDT EULER.

Ein Weg heißt HAMILTON*sch*[3] *(*HAMILTON*ian)*, wenn jeder *Eckpunkt* des Graphen genau einmal in diesem Weg auftaucht.

Ein *Zyklus (cycle)* ist ein geschlossener Weg, der mindestens die Länge 3 hat.

166 Definition WEGE IN DIGRAPHEN
Ein *Weg (gerichteter Weg; directed path)* in einem Digraphen (E, Γ) ist ein n–Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Eckpunkten $x_i \in E$, bei dem für jedes $i = 1, 2, \ldots, n-1$ das Paar (x_i, x_{i+1}) eine Verbindungskante ist, also $(x_i, x_{i+1}) \in \Gamma$. Der Punkt x_1 heißt der *Anfangspunkt*, der Punkt x_n der *Endpunkt* dieses Weges. Bei gerichteten Wegen wird der Richtungssinn im Digraphen berücksichtigt.

Ein *ungerichteter Weg (undirected path)* in einem Digraphen (E, Γ) ist ein n–Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Eckpunkten $x_i \in E$, bei dem für jedes $i = 1, 2, \ldots, n-1$ das Paar (x_i, x_{i+1}) oder das Paar (x_{i+1}, x_i) eine Verbindungskante ist. Bei ungerichteten Wegen wird der Richtungssinn im Digraphen vernachlässigt.

167 Definition ERREICHBARKEITSRELATION IN GRAPHEN
Sei (E, Γ) ein Graph, x und y zwei Eckpunkte. Man sagt, *von Eckpunkt x aus kann man Eckpunkt y erreichen*, oder *Eckpunkt y ist von Eckpunkt x aus erreichbar (reachable)*, wenn es einen Weg mit Anfangspunkt x und Endpunkt y gibt, oder aber, wenn $x = y$ ist, wir also schon am Ziel sind.

Formal: Die Relation $\Longrightarrow \subseteq E \times E$, für die $x \Longrightarrow y$ genau dann gilt, wenn man von x aus y erreichen kann, heißt *Erreichbarkeitsrelation (reachability relation)* des Graphen (E, Γ).

Die Erreichbarkeitsrelation eines Graphen ist die reflexiv-transitive Hülle der Verbindungskantenrelation Γ des Graphen. Die Verbindungskantenrelation bei ungerichteten Graphen ist symmetrisch, die Erreichbarkeitsrelation als deren reflexiv-transitive Hülle ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine *Äquivalenzrelation*.

168 Definition STARKE ERREICHBARKEITSRELATION IN DIGRAPHEN
Sei (E, Γ) ein Digraph, x und y zwei Eckpunkte. Man sagt *von Eckpunkt x aus kann man Eckpunkt y stark erreichen*, oder *Eckpunkt y ist von Eckpunkt x aus stark erreichbar (strongly reachable)*[4], wenn es einen gerichteten Weg mit Anfangspunkt x und Endpunkt y gibt, oder aber, wenn $x = y$ ist, wir also schon am Ziel sind.

Formal: Die Relation $\Longrightarrow \subseteq E \times E$, für die $x \Longrightarrow y$ genau dann gilt, wenn man

[3] Nach dem Mathematiker SIR WILLIAM HAMILTON.
[4] Beachten Sie die Reihenfolge.

von x aus y erreichen kann, heißt *starke Erreichbarkeitsrelation (strong reachability relation)* des Digraphen (E, Γ).

Die starke Erreichbarkeitsrelation eines Digraphen ist die reflexiv-transitive Hülle der Verbindungskantenrelation Γ des Graphen. Die Verbindungskantenrelation bei Digraphen ist im allgemeinen nicht symmetrisch, die (starke) Erreichbarkeitsrelation als deren reflexiv-transitive Hülle ist zwar reflexiv und transitiv, im allgemeinen aber nicht symmetrisch und somit im allgemeinen *keine Äquivalenzrelation*.

169 Definition SCHWACHE ERREICHBARKEITSRELATION
Sei (E, Γ) ein Digraph, x und y zwei Eckpunkte. Man sagt, *von Eckpunkt x aus kann man Eckpunkt y schwach erreichen*, oder *Eckpunkt y ist von Eckpunkt x aus schwach erreichbar (weakly reachable)*, wenn es einen ungerichteten Weg zwischen x und y gibt, oder aber, wenn gleich schon $x = y$ ist.

Formal: Die Relation $\longrightarrow \subseteq E \times E$, für die $x \longrightarrow y$ genau dann gilt, wenn man von x aus y schwach erreichen kann, heißt *schwache Erreichbarkeitsrelation (weak reachability relation)* des Digraphen (E, Γ).

Beachte: Die schwache Erreichbarkeitsrelation eines Digraphen ist die reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle der Verbindungskantenrelation Γ des Graphen. Die Verbindungskantenrelation bei Digraphen ist im allgemeinen nicht symmetrisch, die schwache Erreichbarkeitsrelation als deren reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle ist aber reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine *Äquivalenzrelation*.

170 Bemerkung ERREICHBARKEITSRELATIONEN
Wir erhalten insgesamt die folgenden Erreichbarkeitsrelationen:

In	**Relation**	**Eigenschaft**
Graphen	Erreichbarkeit	reflexiv, symmetrisch, transitiv
Digraphen	Starke Erreichbarkeit	reflexiv, transitiv
Digraphen	Schwache Erreichbarkeit	reflexiv, symmetrisch, transitiv

171 Bemerkung ERREICHBARKEIT UND ZUSAMMENHANG

(1) GRAPHEN
Bei Graphen ist die Erreichbarkeitsrelation symmetrisch. Ist ein Punkt x von einem Eckpunkt y aus erreichbar, so gilt auch das Umgekehrte: y ist von x aus erreichbar. Zusammenhang und Erreichbarkeit sind in Graphen identisch.

(2) DIGRAPHEN, STARKE ERREICHBARKEIT
Bei Digraphen ist die starke Erreichbarkeit nicht symmetrisch. Ist von einem

Eckpunkt x aus ein Eckpunkt y stark erreichbar, dann ist das Umgekehrte nicht unbedingt wahr. Hier ergibt starker Zusammenhang also etwas Neues.

(3) Digraphen, schwache Erreichbarkeit
Bei Digraphen ist die schwache Erreichbarkeitsrelation symmetrisch. Ist ein Eckpunkt x von einem Eckpunkt y aus schwach erreichbar, so gilt auch das Umgekehrte, y ist von x aus schwach erreichbar. Schwacher Zusammenhang und schwache Erreichbarkeit sind in Digraphen identisch.

172 Definition Zusammenhang in Graphen
Zwei Eckpunkte in einem Graphen heißen *zusammenhängend (connected)*, wenn der eine vom anderen aus erreichbar ist und umgekehrt. Die Zusammenhangsrelation ist identisch zur Erreichbarkeitsrelation. Sie wird auch mit $\Longleftrightarrow$ bezeichnet.

173 Definition Starker Zusammenhang in Digraphen
Sei (E, Γ) ein Digraph, x und y zwei Eckpunkte. Zwei Eckpunkte x und y heißen *stark zusammenhängend (strongly connected)*, wenn man von x aus y stark erreichen kann und auch von y aus x stark erreichen kann. Anschaulich heißt das, wenn es unter Beachtung des Richtungssinnes sowohl einen Hinweg als auch einen Rückweg gibt. Der Rückweg darf natürlich auch über andere Ecken verlaufen als der Hinweg.

Formal: Die Relation $\Longleftrightarrow \subseteq E \times E$, mit $x \Longleftrightarrow y$ genau dann, wenn $x \Longrightarrow y$ und $y \Longrightarrow x$, heißt *starke Zusammenhangsrelation (strong connectivity relation)* des Digraphen (E, Γ).

174 Definition Schwacher Zusammenhang in Digraphen
Zwei Eckpunkte in einem Digraphen heißen *schwach zusammenhängend (weakly connected)*, wenn der eine vom anderen aus schwach erreichbar ist. Die Zusammenhangsrelation ist identisch zur Erreichbarkeitsrelation. Sie wird aber oft mit $\longleftrightarrow$ bezeichnet. Die schwache Zusammenhangsrelation eines Digraphen ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine *Äquivalenzrelation*.

Bei starkem Zusammenhang in Digraphen wird mehr gefordert als bei der starken Erreichbarkeit: Zwei Eckpunkte, bei denen der eine vom anderen aus stark erreichbar ist, sind noch lange nicht stark zusammenhängend, weil es nicht unbedingt einen gerichteten Weg zurück gibt.

Starker Zusammenhang ist symmetrisch, aber nicht die symmetrische Hülle der starken Erreichbarkeit, denn starker Zusammenhang ist eine kleinere Relation als starke Erreichbarkeit. Bei starker Erreichbarkeit gilt noch lange nicht starker Zusammenhang.

Starker Zusammenhang enthält all jene Punktepaare, die zusammen mit ihrem gespiegelten Paar in der starken Erreichbarkeitsrelation liegen. Starker Zusammenhang ist der *symmetrische Anteil* der starken Erreichbarkeit.

175 Bemerkung ZUSAMMENHANGSRELATIONEN
Wir erhalten insgesamt die folgenden Zusammenhangsrelationen:

In	**Eigenschaft**
Graphen	Erreichbarkeit = Zusammenhang
Digraphen	Starke Erreichbarkeit $\neq$ starker Zusammenhang
Digraphen	Schwache Erreichbarkeit = schwacher Zusammenhang

Alle drei Zusammenhangsrelationen sind reflexiv, symmetrisch und transitiv, also Äquivalenzrelationen.

176 Definition ZUSAMMENHÄNGENDE GRAPHEN
Ein Graph heißt *zusammenhängend (connected)*, wenn je zwei seiner Eckpunkte zusammenhängend sind.

Ein Digraph heißt *stark zusammenhängend (strongly connected)*, wenn je zwei seiner Eckpunkte stark zusammenhängend sind.

Ein Digraph heißt *schwach zusammenhängend (weakly connected)*, wenn je zwei seiner Eckpunkte schwach zusammenhängend sind.

Wir wollen nun Mengen von Eckpunkten, welche (die Mengen nämlich, respektive die von ihnen induzierten Teilgraphen) zusammenhängen sind. Alle drei Zusammenhangsrelationen sind Äquivalenzrelationen. Das regt an, die entsprechenden Äquivalenzklassen, das sind also Mengen von Eckpunkten, zu studieren.

177 Definition ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN
Sei (E, Γ) ein Graph. Eine *Zusammenhangskomponente (connected component)* des Graphen ist eine Äquivalenzklasse der Zusammenhangsrelation auf dem Graphen. Insbesondere bedeutet das:

(1) Je zwei Eckpunkte x und y aus einer Zusammenhangskomponente Z sind zusammenhängend. Es gibt also sowohl einen Weg von x nach y als auch einen von y nach x, sofern nicht schon $x = y$. Bei einem (ungerichteten) Graphen kann man als Hin- und Rückweg denselben Weg wählen.

(2) Je zwei Eckpunkte x und y aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten können in keiner Art und Weise verbunden werden. Es fehlen also sowohl Hin- als auch Rückweg.

(3) Zusammenhangskomponenten sind *maximale zusammenhängende Mengen*: Es ist keine echte Obermenge einer Zusammenhangskomponente zusammenhängend. Jede zusammenhängende Menge, die nicht Zusammenhangskomponente ist, ist als echte Teilmenge in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

Eine Zusammenhangskomponente, die aus genau einem Eckpunkt besteht, heißt ein *isolierter Punkt*.

178 Definition STARKE ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN
Sei (E, Γ) ein Digraph. Eine *starke Zusammenhangskomponente* des Digraphen ist eine Äquivalenzklasse der starken Zusammenhangsrelation auf dem Digraphen. Insbesondere bedeutet das:

(1) Je zwei Eckpunkte x und y aus einer starken Zusammenhangskomponente Z sind stark zusammenhängend. Es gibt also sowohl einen gerichteten Weg von x nach y und einen gerichteten Weg von y nach x, sofern nicht schon $x = y$. Es ist möglich, daß Hin- und Rückweg über *unterschiedliche* Verbindungskanten und Eckpunkte laufen.

(2) Je zwei Eckpunkte x und y aus verschiedenen starken Zusammenhangskomponenten können entweder *überhaupt nicht verbunden* werden, oder aber es gibt nur einen Weg in einer Richtung.

(3) Eine starke Zusammenhangskomponente ist eine *maximale stark zusammenhängende Menge*. Jede echte Obermenge ist nicht stark zusammenhängend. Jede stark zusammenhängende Menge, die nicht starke Zusammenhangskomponente ist, ist als echte Teilmenge in einer starken Zusammenhangskomponente enthalten.

(4) Sind Z_1 und Z_2 zwei unterschiedliche starke Zusammenhangskomponenten, so kann das bedeuten, daß es weder einen gerichteten Weg von Z_1 nach Z_2 gibt noch einen in umgekehrter Richtung. Es ist aber auch denkbar, daß es einen gerichteten Weg von Z_1 nach Z_2 gibt. Dann darf es aber keinen gerichteten Rückweg von Z_2 nach Z_1 geben, denn sonst wären Z_1 und Z_2 gleich, wie man sich überlegen kann. Natürlich ist es auch denkbar, daß es nur einen gerichteten Weg von Z_2 nach Z_1 gibt und keinen gerichteten Rückweg. Man kann sogar eine Ordnungsrelation auf der Menge aller starken Zusammenhangskomponenten definieren, basierend auf der Tatsache, daß es von der einen einen gerichteten Weg in die andere gibt.

Eine starke Zusammenhangskomponente, die aus genau einem Eckpunkt besteht, heißt ein *starker isolierter Punkt*.

179 Definition SCHWACHE ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN
Versuchen Sie einmal selber, die entsprechenden Definitionen aufzustellen!

180 Beispiel AKTENWEITERGABE IN ÄMTERN
Betrachten Sie das folgende Problem: Die Personen in einem Amt geben Dokumente nach einem streng vorgegebenen Schema weiter. Jeder weiß, wem er Dokumente weitergeben darf und von wem er Dokumente empfangen darf. Dies ist in folgender Liste festgehalten:

Name	**Empfängt von**	**Sendet an**
A	H	B
B	A	H, D
C	E, J	I
D	B, F, E	F, G
E	H	D, C
F	D, G	D
G	D	F
H	B	A, E
I	C, K	J
J	I	C, K
K	J	I

(1) Durch welches mathematische Objekt ist diese Information am besten zu formalisieren? Arbeiten Sie von nun an immer mit den entsprechenden Begriffen dieser Formalisierung.

(2) Was bedeutet es in der gewählten Formalisierung, wenn

   (a) eine bestimmte Person an eine andere Person unmittelbar oder über andere Personen ein Dokument weitersenden kann?

   (b) eine bestimmte Person mit einer anderen Person in beliebigen Dokumentenaustausch treten kann, das heißt jede kann der anderen Dokumente übersenden, sei es unmittelbar, sei es mittelbar über andere Personen.

(3) Eine Führungsebene nennt man in diesem Amt eine Menge von Personen mit der Eigenschaft, daß jedes Mitglied dieser Führungsebene mit jedem anderen Mitglied der Führungsebene Dokumente austauschen kann, mittelbar oder unmittelbar. Nimmt man aber auch nur eine weitere Person zu dieser Menge hinzu, so geht diese Eigenschaft verloren.

   (a) Welches mathematische Objekt entspricht dem Konzept der Führungsebene?

   (b) Wieviele Führungsebenen gibt es in diesem Amt?

(c) Geben Sie diese Führungsebenen explizit als Menge an!

(d) Zum Nachdenken: Ist es möglich, auf diesen Führungsebenen eine Ordnungsstruktur anzugeben? So nach dem Motto, eine Führungsebene A ist größer (mächtiger) als die Führungsebene B, wenn zwar eine Person von A ein Dokument an eine Person in B senden kann, aber keine Person in B ein Dokument an eine Person in A senden kann. Wird dadurch eine Ordnung definiert? Ist es denkbar, daß eine Person von A ein Dokument an eine Person in B senden kann, unter Umständen aber eine andere Person in B ein Dokument an eine andere Person in A? Übersenden bedeutet hier mittelbar oder unmittelbar.

181 Definition KRITISCHE PUNKTE UND KRITISCHE KANTEN
Sei (E,Γ) ein Graph. Ein Punkt $p \in P$ heißt ein *kritischer Punkt (Artikulationspunkt; critical point, articulation point, cut point)*, wenn es ein Punktepaar (x, y) gibt mit $x \neq y$ sowie $x \neq p$ und $y \neq p$, das zusammenhängend ist, nach Entfernung des Punktes p und aller unmittelbar daranhängenden Kanten aber nicht mehr zusammenhängend ist.

Ein Eckpunkt p ist also genau dann ein kritischer Punkt, wenn es zwei weitere Punkte gibt, so daß alle Verbindungswege zwischen diesen Punkten den kritischen Punkt p enthalten müssen. p ist quasi lebenswichtig für die Verbindung zwischen zwei Punkten.

Eine Kante k heißt eine *kritische Kante (Brücke; critical edge, bridge)*, wenn es ein Punktepaar (x, y) gibt, das zusammenhängend ist, nach Entfernung der Kante k aber nicht mehr zusammenhängend ist.

Eine Kante k ist also genau dann eine kritische Kante, wenn es zwei Eckpunkte gibt, so daß alle Verbindungswege zwischen diesen Punkten die kritische Kante k enthalten. k ist quasi lebenswichtig für die Verbindung zwischen zwei Punkten.

182 Bemerkung ZUSAMMENHANG KRITISCHE PUNKTE UND KANTEN
Ist k eine kritische Kante, dann sind beide Eckpunkte dieser kritischen Kante selber wieder kritische Punkte, ausgenommen sie werden durch das Entfernen der Kante selber zu isolierten Punkten. Die kritische Kante wird schließlich nicht nur dadurch unbrauchbar, daß man sie selber entfernt, sondern auch dadurch, daß man einen ihrer Punkte entfernt, dadurch wird ja die Kante gleich mitentfernt.

Die Umkehrung davon gilt aber nicht. Wenn zwei kritische Punkte durch eine Kante verbunden werden, dann muß diese Kante nicht automatisch eine kritische Kante sein. Als anschauliches Beispiel hierzu dient der wegen seiner Form vom Autor “Sputnik” getaufte Graph aus Abb. **??**. Suchen Sie in diesem Graph zwei kritische

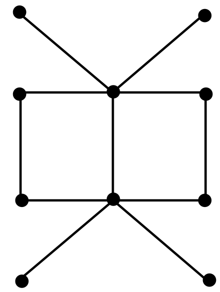

Abb. 6 Sputnik–Graph.

Punkte, deren Verbindung keine kritische Kante ist.

183 Definition BIZUSAMMENHÄNGEND
Ein zusammenhängender Graph heißt *bizusammenhängend (biconnected)*, wenn er keine kritischen Punkte enthält.

Insbesondere bedeutet das, daß bei Entfernen eines beliebigen Eckpunktes kein Punktepaar seine Zusammenhangseigenschaften verliert.

184 Definition ZUSAMMENHANGSZAHL
Wenn man von einem zusammenhängenden Graph eine vorgegebene Anzahl Eckpunkte und die unmittelbar davon betroffenen Kanten entfernt, so kann es sein, daß der Graph nachher nicht mehr zusammenhängend ist. Die *Zusammenhangszahl (connectivity)* eines Graphen ist die kleinste von allen Anzahlen mit dieser Eigenschaft.

Wenn man von einem zusammenhängenden Graph eine vorgegebene Anzahl Kanten entfernt, so kann es sein, daß der Graph nachher nicht mehr zusammenhängend ist. Die *Kantenzusammenhangszahl (edge connectivity)* eines Graphen ist die kleinste von allen Anzahlen mit dieser Eigenschaft.

Besitzt ein zusammenhängender Graph kritische Punkte, so ist seine Zusammenhangszahl 1, besitzt er kritische Kanten, so ist seine Kantenzusammenhangszahl 1. Ein bizusammenhängender Graph hat eine Zusammenhangszahl von 2 oder größer. Zwischen beiden Zusammenhangszahlen gilt stets die folgende Ungleichung:

Kleinster Eckengrad $\geq$ Kantenzusammenhangszahl $\geq$ Zusammenhangszahl.

185 Bemerkung ANWENDUNGEN DER ZUSAMMENHANGSTHEORIE
In vielen Anwendungsbereichen ist der Zusammenhang eine wichtige und angenehme Eigenschaft eines Graphen.

(1) KOMMUNIKATIONSNETZE
Ein WAN (wide area network) ist ein großes, einen oder mehrere Kontinente umfassendes Netzwerk von Computern. Die einzelnen Computer kann man als Endpunkte, die alle als bidirektional angenommenen Verbindungslinien aus Unterwasserkabeln, Richtfunkstrecken oder Satellitenverbindungen, als ungerichtete Verbindungskanten darstellen. Alle Computer im Graphen können direkt oder durch Vermittlung von anderen Computern miteinander kommunizieren, solange dieser Graph zusammenhängend ist. Gibt es einen *kritischen Punkt* in diesem Graphen, so bewirkt der Ausfall des entsprechenden Rechners, daß es mindestens zwei Rechner gibt, die dann nicht mehr miteinander kommunizieren können. Gibt es eine *kritische Kante* in diesem Graphen, so bewirkt der Ausfall der entsprechenden Verbindungslinie, daß es mindestens zwei Rechner gibt, die dann nicht mehr miteinander kommunizieren können.

(2) VERKEHRSNETZE
Verkehrsverbindungen durch Autobahn, Eisenbahn oder Flugzeug können genauso durch Graphen modelliert werden. Hier entspricht der Ausfall eines Autobahnteilstücks durch Unfall, der Ausfall einer Eisenbahnverbindung durch Schneefall oder der Ausfall einer bestimmten Flugverbindung durch technischen Schaden möglicherweise der Entfernung einer *kritischen Kante*. Die Sperre einer Autobahnzufahrt, der Ausfall einer Weiche oder eines Bahnhofs, schlechte Sicht auf einem Flughafen entsprechen möglicherweise der Entfernung eines *kritischen Punktes*. Was hat das für Konsequenzen?

(3) VERSORGUNGSNETZE
Das bekannteste Versorgungsnetz ist das elektrische. Aber auch die Wasserversorgung, die Struktur von Telefonanlagen, ja sogar der Informationsfluß in einem Büro kann durch Graphen modelliert werden. Auch hier haben wir die Problematik von Ausfällen von Versorgungsstrecken – mögliche kritische Kanten – oder Versorgungszentren – mögliche kritische Punkte.

Beim Entwurf solcher Strukturen ist es also wichtig, entsprechend hohe Zusammenhangszahlen zu haben.

186 Beispiel ZYKLEN UND ZÖPFE ALS COMPUTERNETZE
Zyklen und Zöpfe werden gerne zur Konstruktion von Computernetzen verwendet. Warum?

(1) Geben Sie für Zyklen der Ordnung n, für Zöpfe der Ordnung n zum Verzopfungsgrad k die beiden Zusammenhangszahlen an.

(2) Diskutieren Sie die Bedeutung dieser Zahlen für den Ausfall von Verbindungsstrecken und Knotenrechnern im Netzwerk.

(3) Welcher Verbindungsgraph ist, bei vorgegebener Rechnerzahl n, vom Standpunkt der Ausfallsicherheit der bestmögliche, wenn man voraussetzt, daß je zwei Rechner durch höchstens eine Leitung verbunden sind. Bestimmen Sie für diesen Graphen beide Zusammenhangszahlen zuerst an Beispielen. Versuchen Sie dann, eine allgemeine Formel aufzustellen.

(4) Vergleichen Sie die Situation bei Zyklen und Zöpfen mit dieser bestmöglichen Netzstruktur.

(5) Bewerten Sie Zyklen, Zöpfe und die bestmögliche Netzstruktur bezüglich ihrer Skalierbarkeit, das heißt untersuchen Sie, welcher Aufwand entsteht, wenn in ein bestehendes Netz ein weiterer Rechner aufgenommen werden soll.

(6) Bewerten Sie den Hardware Aufwand zum Aufbau eines Zyklus, eines Zopfes und der bestmöglichen Netzstruktur.

(7) Weshalb gelangt diese Netzstruktur in großen Netzen nie zum Einsatz?

187 Bemerkung ZUSAMMENBRUCH DES ZUSAMMENHANGS IN DIGRAPHEN
Wir haben bisher an verschiedenen Stellen gesehen, daß alle mit Wegen verbundenen Begriffe in Digraphen in einer schwachen und starken Variante definiert werden können und haben dies auch bei Erreichbarkeit, Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten getan. Bei kritischen Punkten und Kanten ist dies ganz analog und wird als Abstraktions- und Formulierungsübung dem Leser dringend empfohlen!

5.5 Darstellung von Graphen auf Rechnern

188 Definition ADJAZENT UND INZIDENT
Ein Eckpunkt x heißt *adjazent zu (adjacent to)* einem Eckpunkt y in einem Graphen (Digraphen, Multigraphen), wenn eine Kante (gerichtete Kante) dieses Graphen (Digraphen, Multigraphen) den Eckpunkt x zum[5] Eckpunkt y verbindet. Adjazenz bezeichnet also die "Nachbarschaft" von Eckpunkten.

Ein Eckpunkt x eines Graphen (Digraphen, Multigraphen) heißt *inzident (incident)* mit der Verbindungskante v, wenn der Eckpunkt x auf dieser Verbindungskante liegt. Inzidenz bezeichnet also die "Nachbarschaft" eines Eckpunktes zu einer Kante.

189 Definition ADJAZENZMATRIX FÜR GRAPHEN
Sei $\mathcal{G} = (E, V)$ ein Graph mit endlicher Eckpunktmenge E. Ohne Beschränkung

[5] Man beachte, daß das Wort "zum" bei Digraphen auf die Richtung der Kante hinweist. "Zum" darf also nicht durch "mit" ersetzt werden.

der Allgemeinheit sei $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathrm{N}$. Falls E eine andere Menge ist, suche man sich einen isomorphen Graphen mit einer solchen Eckpunktmenge.

Die *Adjazenzmatrix (adjacency matrix)* $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ des Graphen $\mathcal{G}$ ist die $n \times n$ Matrix, bei der in Zeile i und Spalte j das Element $a_{i,j}$ steht, mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad i = j \\ 0 & \Leftrightarrow \quad \{i,j\} \notin V \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \{i,j\} \in V \ \ (\text{resp. } \{j,i\} \in V) \end{cases}$$

Steht also in der Position (i, j) eine 1, so gibt es eine Kante zwischen Eckpunkt i und Eckpunkt j.

Die Adjazenzmatrix eines Graphen ist symmetrisch, bei Spiegelung an der Hauptdiagonale (links-oben nach rechts-unten) geht sie in sich selbst über.

190 Definition ADJAZENZMATRIX FÜR WEITERE GRAPHENKONZEPTE
Das Konzept der Adjazenzmatrix kann auf Digraphen, Multigraphen und Graphen mit Schlaufen verallgemeinert werden:

Digraphen können folgendermaßen dargestellt werden: Führt eine (gerichtete) Kante von i nach j, so wird das Element $a_{i,j}$ gleich 1 gesetzt, das Element $a_{j,i}$ bleibt aber unberührt. Digraphen haben also im allgemeinen nicht-symmetrische Adjazenzmatrizen.

Schlaufen können dargestellt werden, indem die entsprechenden Elemente in der Hauptdiagonalen gleich 1 gesetzt werden: Führt von i nach i eine Schlaufe, so setzt man $a_{i,i} = 1$.

Ungerichtete Multigraphen können dargestellt werden, indem das entsprechende Matrixelement zahlenmäßig angibt, wie viele Kanten vorhanden sind. Verbinden also 4 Kanten die Ecken i und j, so wird $a_{i,j} = 4$ gesetzt, und bei ungerichteten Multigraphen ist dann auch $a_{j,i} = 4$.

191 Definition INZIDENZMATRIX
Sei $\mathcal{G} = (E, V, \alpha)$ ein ungerichteter Multigraph mit endlicher Eckpunktmenge E und endlicher Verbindungskantenmenge V. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $n \in \mathrm{N}$ und $m \in \mathrm{N}$.

Die *Inzidenzmatrix (incidence matrix)* $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ des Graphen $\mathcal{G}$ ist die $n \times m$ Matrix, bei der in Zeile i und Spalte j das Element $a_{i,j}$ steht, mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad i \notin \alpha(j) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad i \in \alpha(j) \end{cases}$$

Es ist also $a_{i,j} = 1$, wenn der Eckpunkt i inzident zur Verbindungskante j ist.

Auch hier gibt es verschiedene Varianten für gerichtete Multigraphen und Digraphen.

192 Definition ADJAZENZLISTE
Die *Adjazenzliste (adjacency list)* eines Graphen (E, V) ist eine Liste von Listen von Eckpunkten. Sei wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, dann ist dadurch auch eine lineare Ordnung auf der Menge aller Eckpunkte gegeben. Die Adjazenzliste ist nun die Liste $(N_1, N_2, \ldots, N_n)$, wobei N_i wiederum eine Liste ist, nämlich die entsprechend geordnete Liste der Eckpunkte, die als Endpunkte einer Verbindungskante auftreten, welche den Eckpunkt i als Anfangspunkt hat.

Diese Definition kann unmittelbar für Digraphen übernommen werden.

193 Bemerkung POINTERSTRUKTUREN ZUR GRAPHENDARSTELLUNG
Je nach verwendeter Programmiersprache können Graphen, Digraphen und Multigraphen auch durch *Zeigerstrukturen (pointer structures)* und ähnliche Mechanismen indirekter Referenzen in den Speicher abgebildet werden. Dies ist aber stark von der Semantik der benutzten Programmiersprache abhängig.

194 Beispiel DARSTELLUNG SPEZIELLER GRAPHEN
Stellen Sie die folgenden Graphen durch Angabe der Adjazenzmatrix, der Inzidenzmatrix und der Adjazenzliste dar: Den vollständigen Graphen der Ordnung fünf, also K_5, den vollständigen bipartiten Graphen $K_{2,3}$, den Zyklus der Ordnung sechs, den Zopf der Ordnung sechs zum Verzopfungsgrad zwei und einen Zyklus der Ordnung sechs.

5.6 Spezielle Wege in Graphen

195 Beispiel KÖNIGSBERGER BRÜCKENPROBLEM VON EULER
Der Mathematiker LEONHARDT EULER (1707 – 1782) ging am Sonntag immer in der Stadt Königsberg, deren Stadtplan Sie in Abb. **??** finden, spazieren. Die Stadt wird durch den Fluß Pregel in vier Bezirke A, B, C und D geteilt, sieben Brücken verbinden diese untereinander. EULER stellte sich die Frage, ob er seinen Sonntagsspaziergang so durch alle vier Bezirke von Königsberg führen kann, daß er jede Brücke genau einmal überquert und anschließend ohne weitere Benutzung von Brücken nach Hause zurückkehren kann. Man beachte, daß die Antwort auf diese Frage unabhängig davon ist, in welchem Bezirk von Königsberg EULER wohnt. Beantworten Sie die Frage von EULER unter Anwendung der folgenden Theoreme.

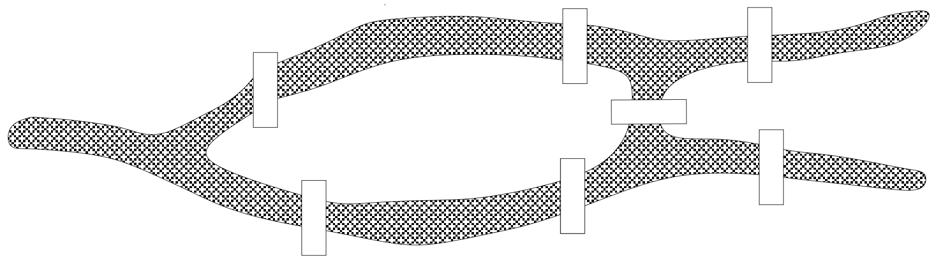

Abb. 7 Stadtplan von Königsberg.

196 Definition EULERSCHE GRAPHEN
Ein Graph (E, V) heißt EULER*sch* (EULER *Graph*, EULER*ian graph)* wenn es einen geschlossenen EULERschen Weg in diesem Graphen gibt. Dieser Weg braucht aber nicht HAMILTONsch zu sein, ein Eckpunkt kann also mehrmals in diesem Weg auftauchen. Es taucht allerdings jeder Eckpunkt des Graphen ausgenommen die isolierten Eckpunkte mindestens einmal in diesem Weg auf. Warum?

197 Theorem THEOREM ÜBER EULERGRAPHEN
Für einen Graphen gilt:

(1) Ein Graph ist genau dann ein EULER*graph*, wenn er *zusammenhängend* ist und jeder Eckpunkt einen *geradzahligen Grad* hat.

(2) Ein Graph enthält genau dann einen *offenen* EULER*weg*, wenn er *zusammenhängend* ist und *höchstens zwei* Eckpunkte mit *ungeradzahligem Grad* besitzt.

(3) In jedem Graphen ist die Anzahl der *Eckpunkte mit ungeradzahligem Grad gerade*.

198 Beispiel PROBLEM DER BRIEFKUVERTS
Betrachten Sie stilisierte Skizzen des offenen und des geschlossenen Briefkuverts. Welche Ihrer Skizzen kann ohne Absetzen des Bleistifts und ohne "Doppeltzeichnen" einer Kante gezeichnet werden – und warum?

199 Beispiel PROBLEM DES TELEPRINTERS
Eine drehbare Walze hat an ihrer Oberfläche sechzehn elektrische Kontaktflächen. Das Lager, in welcher sich diese Walze drehen kann, hat vier elektrische Kontaktpunkte, die in jeder der sechzehn Drehpositionen der Walze auf vier genau nebeneinander liegende Kontaktflächen der Walze drücken. Diese vier Kontaktpunkte sind jeweils an eine Lampe angeschlossen. Je nachdem ob eine Kontaktfläche der Walze nun an eine vorgegebene Stromquelle angeschlossen ist oder nicht, leuchten

bestimmte der vier, an die Kontaktpunkte des Lagers angeschlossenen Lampen auf.

Zeigen Sie, daß man die 16 Kontaktflächen der Walze so an die Stromquelle anschließen oder nicht anschließen kann, daß aus dem Bitmuster der vier Lampen (leuchtet/leuchtet nicht) eindeutig die Drehposition der Walze abgelesen werden kann.

Hinweis: Konstruieren Sie sich den gerichteten Graphen mit der Eckpunktmenge $E := \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ und zeichnen Sie alle (gerichteten) Verbindungskanten der Form $(abc, bc0)$ und $(abc, bc1)$ ein. Finden Sie in diesem Graphen einen (gerichteten) EULERweg. Warum muß das möglich sein? Nun interpretieren Sie diesen EULERweg geeignet, indem Sie je zwei in ihm aufeinanderfolgende Bitmuster mit 3 Bits zu einem einzigen mit 4 Bits komprimieren. Sie erhalten dadurch sowohl die Schaltreihenfolge der Lampen als auch die Vorschrift, wie die Kontaktflächen auf der Walze zu verdrahten sind.

Dieses nicht ganz einfach zu lösende Beispiel hat große Bedeutung in der Telekommunikation und für Telefonvermittlungsanlagen.

200 Definition HAMILTONSCHE GRAPHEN
Ein Graph (E, V) heißt HAMILTON*sch* (HAMILTON *Graph;* HAMILTON*ian graph)*, wenn es einen geschlossenen HAMILTONschen Weg in diesem Graphen gibt. Dieser Weg braucht nicht EULERsch zu sein, eine Verbindungskante kann also überhaupt nicht, mehrmals, aber auch einmal in diesem Weg auftauchen.

201 Beispiel HAMILTONS IKOSAEDERSPIEL
HAMILTON stieß auf die nach ihm benannten Graphen bei der Suche nach algebraischen Strukturen, in denen das Kommutativgesetz $(x * y = y * x)$ nicht gilt. Die von ihm gefundenen Algebren heißen heute nach ihm HAMILTONsche Quaternionen. Sie haben in der Quantenphysik und der analytischen Geometrie von Drehungen eine große Bedeutung erlangt.

HAMILTON formulierte seine Ideen über Graphen auch in Form eines Spiels, das er 1859 unter dem Titel *A Voyage Round the World* an einen Händler verkaufte, der dieses für 25 Pfund weitervertrieb. Es ging dabei um den Abb. **??** gezeigten Ikosaedergraphen mit entsprechend bezeichneten Eckpunkten, deren Buchstaben Abkürzungen für Städtenamen sind, B für Brüssel, Z für Zanzibar. Ausgehend von einem kurzen Wegstück, etwa dem Weg $BCPNM$, war es die Aufgabe des Spielers, diesen Weg zu einer Rundreise um die Welt, bei der aber kein Ort mehrmals besucht wird, also zu einem geschlossenen HAMILTONschen Weg, zu erweitern. Versuchen Sie Ihr Glück!

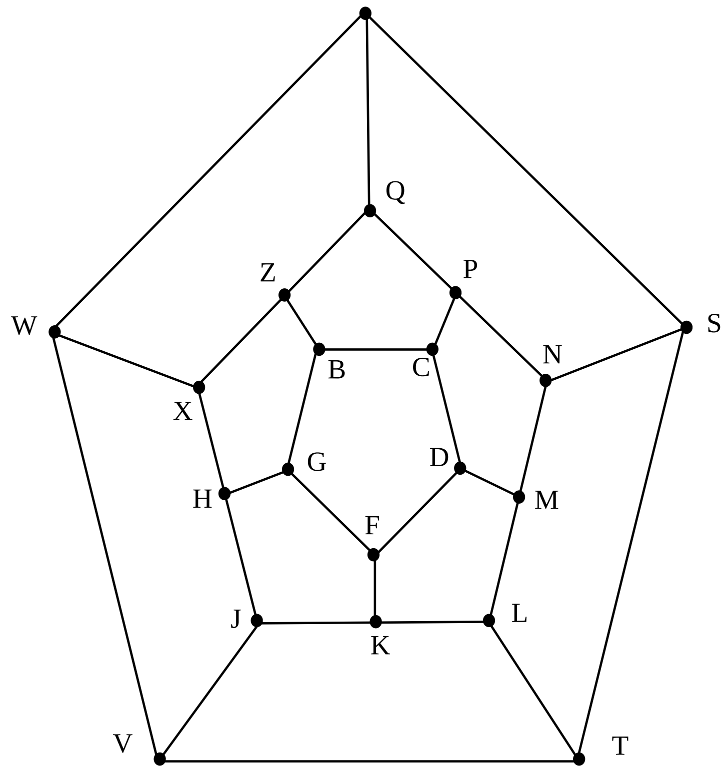

Abb. 8 Hamiltons Ikosaederspiel.

202 Beispiel Tour des Springers
Vorgegeben sei ein Schachbrett der Ausmaße $n \times n$. Ein Springer bewegt sich in einem Schachbrett bekanntlich so, daß er von einem Feld jeweils zum zweitnächsten andersfarbigen Feld springen kann. Kann der Springer, startend in einem bestimmten Feld des Schachbretts, so auf diesem umherspringen, daß er jedes Feld genau einmal besucht hat und dann wieder am Ausgangspunkt landet?

Für 4×4 und 5×5 Schachbretter ist die Antwort nein, für ein klassisches 8×8 Schachbrett gibt es aber so eine Tour für den Springer. Setzen Sie diese Problematik in Zusammenhang mit Hamiltongraphen.

203 Theorem Theorem von Dirac
Ist in einem Graphen mit mindestens drei Eckpunkten der Grad jedes Eckpunktes größer gleich der halben Anzahl von Eckpunkten, dann ist der Graph Hamiltonsch.

204 Theorem Theorem von Ore
Ist in einem Graphen mit mindestens drei Eckpunkten für jedes Paar nicht adjazenter Eckpunkte die Summe der Grade größer oder gleich der Anzahl seiner Eckpunkte, dann ist der Graph Hamiltonsch.

205 Beispiel THEOREME VON DIRAC UND ORE
Geben Sie zu den Theoremen von DIRAC und ORE jeweils zwei illustrative Beispiele von HAMILTONgraphen an, welche die entsprechenden Kriterien erfüllen.

206 Beispiel ZUSAMMENHANG EULERGRAPH – HAMILTONGRAPH
Zeigen Sie, daß es keinen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Eigenschaft, ein EULERgraph zu sein, und der Eigenschaft, ein HAMILTONgraph zu sein, gibt. Geben Sie also insgesamt 4 Graphen an, die HAMILTONsch aber nicht EULERsch, EULERsch aber nicht HAMILTONsch, HAMILTONsch und EULERsch, sowie weder HAMILTONsch noch EULERsch sind. Hinweis: Gehen Sie vom Quadrat mit Mittelpunkt aus. In zwei Fällen kann man dann noch zwei Eckpunkte hinzufügen. Die Graphen können alle in einem gewissen Sinn symmetrisch gewählt werden.

5.7 Attributierte Graphen

Häufig tragen die Eckpunkte und die Verbindungskanten von Graphen, Multigraphen und Digraphen zusätzliche Informationen, die oft Attribute, Gewichte oder Farben genannt werden.

207 Definition GRAPH MIT ATTRIBUTIERTEN KANTEN
Ein Graph mit *attributierten Kanten* ist ein Quadrupel (E, V, A, α) aus einem Graphen (E, V), einer Menge A von *Attributen* und einer *Funktion* $\alpha : V \to A$, die jeder Verbindungskante $v \in V$ ein Attribut $\alpha(v)$ zuordnet.

208 Definition GRAPH MIT ATTRIBUTIERTEN ECKPUNKTEN
Ein Graph mit *attributierten Eckpunkten* ist ein Quadrupel (E, V, A, α) aus einem Graphen (E, V), einer Menge A von *Attributen* und einer *Funktion* $\alpha : E \to A$, die jedem Eckpunkt $e \in E$ ein Attribut $\alpha(e)$ zuordnet.

209 Bemerkung ANWENDUNGEN ATTRIBUTIERTER GRAPHEN
Die wichtigsten Formen attributierter Graphen sind Graphen mit Angaben von Weglängen, Graphen mit Punktfärbungen, Graphen mit Kantenfärbungen sowie die semantischen und neuralen Netze der künstlichen Intelligenz.

210 Beispiel PROBLEM DES HANDLUNGSREISENDEN
Vorgegeben sind Städte und ein Straßennetz, das diese Städte verbindet. Wir kennen die Längen dieser Straßen. Ein Handlungsreisender soll nun mit dem Auto so durch alle diese Städte fahren, daß er jede Stadt genau einmal besucht und am Ende der Reise wieder am Ausgangspunkt ankommt. Unter allen möglichen Routen, die er so auswählen kann, soll er jene Route suchen, bei der er am wenigsten Kilometer

mit dem Firmenauto fährt.

Wir können das Problem wie folgt formalisieren:

(1) Strassennetz als Graph
Das Straßennetz wird durch einen Graphen dargestellt. Die Menge E der Eckpunkte ist genau die Menge der Städte. Die Menge V der Verbindungsstraßen ist die Menge aller zweielementigen Stadtmengen.

(2) Entfernungen als Attribute auf den Kanten
Führt etwa von Zürich nach Innsbruck eine Straße der Länge 330km, so drükken wir das dadurch aus, daß der Wert der Attributsfunktion auf der Verbindungskante $\{\text{Zürich}, \text{Innsbruck}\}$ gerade 330 ist: $\alpha(\{\text{Zürich}, \text{Innsbruck}\}) = 330$.

(3) Rundfahrt als geschlossener Hamiltonscher Weg
Eine Rundfahrt des Handlungsreisenden, bei der dieser jede Stadt genau einmal besucht und anschließend an den Ausgangsort zurückkehrt, entspricht einem geschlossenen Hamiltonschen Weg $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit $e_1 = e_n$ durch diesen Graphen.

(4) Gesamte Reiselänge als Attributsumme
Diesem Weg $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ entspricht eine Weglänge

$$l = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha(\{e_i, e_{i+1}\})$$

Wir werden diesem Problem in der Komplexitätstheorie nochmals begegnen. In der englischen Literatur findet es sich als Problem des *Travelling Salesman*.

211 Beispiel Chinesisches Problem vom Postboten
Ein Postbote in einem kleinen Dorf trägt seine Post mit dem Handwagen aus. Der Postbote möchte seinen Weg durch das Dorf nun so planen, daß er genau einmal durch jede Straße gehen muß und insgesamt einen möglichst kurzen Weg zurücklegt.

Das Problem ähnelt bis auf einen kleinen Unterschied dem des Handlungsreisenden. Die englische Literatur kennt es als *Chinese Postman Problem*. Chinese ist jedoch nicht der Postbote, sondern Meigu Gann, der dieses Problem 1962 formuliert hat.

Wir können das Problem ähnlich wie im vorangegangenen Beispiel formalisieren:

(1) Strassennetz als Graph
Das Straßennetz wird durch einen Graphen dargestellt. Die Menge E der Eckpunkte ist genau die Menge der Städte. Die Menge V der Verbindungsstraßen ist die Menge aller zweielementigen Stadtmengen.

(2) Entfernungen als Attribute auf den Kanten
Gleich wie im vorangegangenen Beispiel.

(3) Rundfahrt als geschlossenen Eulerschen Weg
Eine Rundfahrt des Postboten, bei der dieser jede Straße zum Zwecke des Posteinwurfs genau einmal besucht und anschließend an den Ausgangsort zurückkehrt, entspricht einem geschlossenen Eulerschen Weg $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit $e_1 = e_n$ durch diesen Graphen.

(4) Gesamte Reiselänge als Attributsumme
Diesem Weg $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ entspricht eine Weglänge

$$l = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha(\{e_i, e_{i+1}\})$$

212 Definition Punktfärbungen
Sei (E, V) ein Graph und $\phi : E \to C$ eine Abbildung, die jedem Eckpunkt ein Attribut zuweist. ϕ heißt eine *korrekte Punktfärbung (Knotenfärbung, Färbung, vertex coloring, coloring)* mit k Farben, wenn die Menge C genau k Elemente hat und je zwei verbundene Eckpunkte verschiedene Farbe tragen: $\forall x, y \in E, x \neq y : \{x, y\} \in V \Rightarrow \phi(x) \neq \phi(y)$.

Ein Graph heißt *k–färbbar (k–colorable)*, wenn es eine Punktfärbung dieses Graphen mit k Farben gibt.

213 Definition Chromatische Zahl
Die *chromatische Zahl (Färbezahl, chromatic number)* $\chi(\mathcal{G})$ eines Graphen $\mathcal{G} = (E, V)$ ist die kleinste Zahl k, zu der es noch eine Punktfärbung dieses Graphen mit k Farben gibt.

In Abb. **??** (siehe S. 94) sehen Sie einen Graphen, links mit inkorrekter und rechts mit korrekter Punktfärbung. Dieser Graph hat die chromatische Zahl 3.

214 Beispiel Chromatische Zahlen einiger Graphen
Bestimmen Sie die chromatischen Zahlen der folgenden Graphen und Graphenfamilien zuerst an Beispielen, dann versuchen Sie eine allgemeine Formel zu finden und zu beweisen: Vollständige Graphen der Ordnung n, bipartite Graphen, Zyklen, Zöpfe.

215 Theorem Theorem von Brooks
Ist der maximale Grad der Eckpunkte eines Graphen gleich d, dann ist seine chromatische Zahl kleiner als $d+1$. Wissen wir ferner, daß der Graph zusammenhängend

ist, aber weder ein Zyklus noch ein vollständiger Graph ist, dann ist seine chromatische Zahl kleiner als d.

216 Beispiel CHEMIKALIENPROBLEM
In einer chemischen Fabrik gibt es eine Menge S verschiedener chemischer Stoffe. Man weiß, daß es gewisse Paare von Stoffen gibt, die auf gefährliche Weise miteinander reagieren können, wenn sie in ein und demselben Raum aufbewahrt werden. Wir wollen diese Stoffe zueinander inkompatibel nennen. Man sucht nun eine Aufteilung der Stoffe auf Räume so, daß in keinem Raum zueinander inkompatible Stoffe aufbewahrt werden. Wegen der herrschenden Platznot sollen aber möglichst wenig Räume benutzt werden.

(1) Formalisieren Sie diese Situation durch geeignete graphentheoretische Begriffe.

(2) Was ist die kleinste Anzahl benötigter Räume graphentheoretisch?

(3) Lösen Sie das Problem konkret für die Chemikalien Salzsäure (HCl), Natriumlauge ($NaOH$), Kalilauge (KOH), Phosphorsäure (H_3PO_4), Schwefelsäure (H_2SO_4), Methan (CH_4), Tetrachlorkohlenstoff (CCl_4) und destilliertem Wasser. Jede Lauge steht mit einer Säure in Konflikt, Methan und Tetrachlorkohlenstoff reagieren heftig miteinander, Tetrachlorkohlenstoff sollte auch nicht mit Schwefelsäure zusammen aufbewahrt werden, und letztere sollte nicht mit Wasser in einem Raum aufbewahrt werden, da sie Wasser aus der Luft anzieht und so allmählich ihre Konzentration verliert.

217 Beispiel AUSFLUGSPROBLEM
Ein Jugendclub möchte Ausflüge für seine 9 Mitglieder Anton, Bernhard, Carlo, David, Ewald, Franz, Georg, Harald und Iris organisieren. Hierbei soll die soziale Struktur in der Gruppe berücksichtigt werden: Carlo will weder mit Anton, noch mit Bernhard, Ewald oder Harald auf dem Ausflug sein, Anton will weder mit Carlo, Franz, Georg noch mit Iris zusammen sein, Ewald und Harald streiten ohnehin andauernd, Franz ärgert immer Bernhard und Georg, und letztlich können Bernhard und Ewald sich nicht mit Iris vertragen.

(1) Drücken Sie die vorliegenden Informationen graphentheoretisch aus.

(2) Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von Ausflügen, die organisiert werden muß, wenn auf die erwähnte Problematik geachtet werden soll.

(3) Was ist diese kleinste Anzahl von Ausflügen graphentheoretisch?

218 Beispiel ZWEI-CHROMATISCHE GRAPHEN SIND BIPARTIT
Zeigen Sie, daß *Graphen der chromatischen Zahl zwei bipartite Graphen* sind. Gilt auch die Umkehrung? Falls ja, geben Sie einen Beweis, ansonsten konstruieren Sie

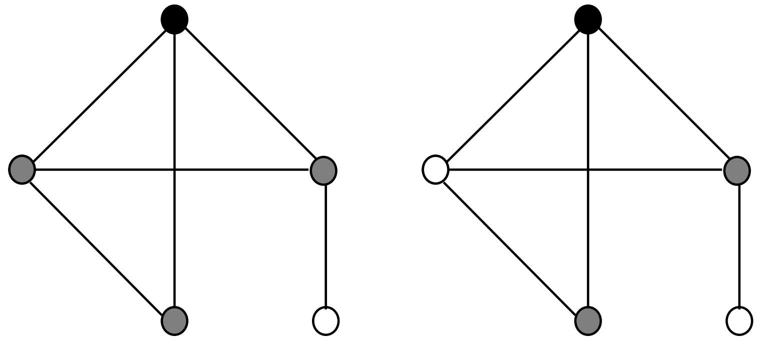

Abb. 9 Inkorrekte und korrekte Punktfärbung.

ein Gegenbeispiel.

219 Beispiel REGISTERZUTEILUNGSPROBLEM
Wird ein Programm einer Hochsprache im Compiler in ein Programm einer Assemblersprache übersetzt, so müssen auch längere arithmetische Ausdrück in Assembler umgewandelt werden. Für die Ablage von Zwischenergebnissen steht hier der langsame Hauptspeicher zur Verfügung und eine kleinere Anzahl sehr schneller Register innerhalb der CPU. Je nach Architekturkonzept sind das 2–16 Register (CISC Architektur) oder bis zu 256 Register und mehr (RISC Architektur). Man ist natürlich bemüht, möglichst die schnellen Register zu verwenden, es kann aber sein, daß man nicht ausreichend viele Register zur Verfügung hat. Während einer längeren Berechnung legt man deshalb ein Zwischenergebnis nur so lange in einem Register ab, als man das Zwischenergebnis wirklich braucht, damit das Register möglichst bald wieder für andere Zwecke zur Verfügung steht.

Als Resultat verschiedener Compilationsvorgänge erhält man eine Liste, welche die sequentielle Reihenfolge, in der verschiedene Zwischenresultate ausgerechnet werden enthält. Als Ergebnis weiterer Schritte, die in der Literatur zu Compilerbau genauer erläutert werden, bekommt man schließlich einen sogenannten *Konfliktgraphen*. Seine Eckpunkte tragen als Attribute die Namen oder arithmetischen Teilausdrücke, welche die oben erwähnten Zwischenresultate repräsentieren. Zwei Eckpunkte sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn diese Zwischenresultate *in Konflikt stehen* – das bedeutet, während gewisser Zeiten in der Berechnung müssen diese Zwischenresultate gleichzeitig bekannt sein, weil sie etwa zueinander addiert werden müssen. In der Sprache der Compilerbauer würde man hier von *überlappenden Lebensdauern (livetimes)* sprechen.

Bevor ein optimierender Compiler nun Register und, falls erforderlich, Hauptspeicher zur Ablage der Zwischenresultate vergibt, überprüft er, ob er mit den Registern allein auskommt. Das Kriterium hierfür ist, daß miteinander in Konflikt stehende Zwischenresultate nicht auf ein und dasselbe Register abgelegt werden können.

Interpretieren Sie diese Problematik im Lichte der Graphen und Graphenfärbungen.

220 Definition Kantenfärbungen
Sei (E, V) ein Graph und $\phi : V \to C$ eine Abbildung, die jeder Verbindungskante ein Attribut zuweist. ϕ heißt eine *korrekte Kantenfärbung (edge coloring)* mit k Farben, wenn die Menge C genau k Elemente hat und je zwei Verbindungskanten, die sich in einem gemeinsamen Eckpunkt treffen, verschiedene Farben tragen: $\forall a, b \in V, a \neq b : a \cap b \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \phi(a) \neq \phi(b)$.

Ein Graph heißt *k–kantenfärbbar (k–edge-colorable)*, wenn es eine Kantenfärbung dieses Graphen mit k Farben gibt.

221 Definition Chromatischer Index
Der *chromatische Index (Kantenfärbezahl, chromatic index)* eines Graphen (E, V) ist die kleinste Zahl k, zu der es noch eine Kantenfärbung dieses Graphen mit k Farben gibt.

222 Beispiel Chromatische Indizes einiger Graphen
Bestimmen Sie die chromatischen Indizes der folgenden Graphen und Graphenfamilien an Beispielen und versuchen Sie eine allgemeine Formel zu finden und zu beweisen: Vollständige Graphen der Ordnung n, Zyklen und Zöpfe.

223 Theorem Theorem von Vizing
Ist der maximale Grad der Eckpunkte eines Graphen gleich d, dann ist sein chromatischer Index d oder $d + 1$.

224 Theorem Theorem von König
Der chromatische Index eines bipartiten Graphen ist gleich dem maximalen Grad seiner Eckpunkte.

225 Beispiel Verkabelungsproblem
In einem großen elektrischen Schaltkasten müssen verschiedene Baugruppen mit Drähten verbunden werden. Um ein Wirrwarr von Drähten zu vermeiden, werden alle Drähte, die von einer Baugruppe abgehen, mit einem Kabelbinder zu einem kompakten Bündel zusammengeschnürt und fixiert. Damit man die einzelnen Drähte des Bündels aber trotzdem noch voneinander unterscheiden kann, ohne gleich den Kabelbinder lösen zu müssen, sollen alle Drähte, die von einer bestimmten Baugruppe abgehen, unterschiedlich gefärbt sein. Wieviele verschiedene Drahtfarben müssen in einer gegebenen Schaltung benutzt werden?

Formalisieren Sie diese Situation durch geeignete graphentheoretische Begriffe. Was ist die kleinste Anzahl benötigter Drahtfarben graphentheoretisch? Lösen Sie das

Problem konkret für die Telefonanlage eines Büros: Es gibt 20 Mitarbeiter, jeder hat ein Telefon. Zwei Schaltstellen im Sekretariat versorgen diese 20 Telefone, indem an jeder Schaltstelle je 10 Telefone hängen. Die Schaltstellen sind untereinander verbunden. Das Telefon des Chefs ist mit beiden Schaltstellen verbunden. Es gibt 3 Amtsleitungen, eine für jede Schaltstelle und eine für den Chef. Identifizieren Sie die zu verbindenden Schaltelemente, stellen Sie den zugehörigen Graphen auf und suchen Sie eine minimale Färbung für die Verbindungsdrähte.

226 Beispiel PRÜFUNGSPROBLEM
Am Ende eines Semesters wollen die Studenten Einstein, Zweistein, Dreimann und Vierli bei den Professoren Turing, Gödel und Church eine Prüfung ablegen. Einstein tritt an bei Turing und Church, Zweistein bei allen drei Professoren, Dreimann bei Turing und Gödel, Vierli bei Gödel und Church. Die Prüfungen fangen um 9 Uhr an. Eine Prüfung dauert jeweils genau eine Stunde. Wann sind die drei Professoren frühestens fertig und können eine gemeinsame Nachbesprechung aller Prüfungen machen?

Drücken Sie die vorliegenden Informationen graphentheoretisch aus. Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von gleichzeitigen Prüfungsrunden, die organisiert werden müssen. Was ist diese kleinste Anzahl graphentheoretisch? Ist der auftretende Graph ein spezieller Graph?

227 Bemerkung VIERFARBENPROBLEM DER KARTOGRAPHIE
Ein berühmtes und bekanntes klassisches Problem der Mathematik, das über 150 Jahre ungelöst blieb, ist das Vierfarbenproblem: Wieviele Farben benötigt ein Kartograph, um eine Karte auf dem Globus so zu färben, daß keine benachbarten Länder dieselbe Farbe tragen. Das Meer wird hier auch als Land gerechnet. Die Erfahrung der Kartographen zeigte, daß 4 Farben ausreichen.

Das Problem wurde 1976 von HAKEN und APPEL unter Verwendung eines Computerprogramms gelöst, mit dem über 1500 Spezialfälle überprüft wurden.

228 Bemerkung VIERFARBENPROBLEM DER GRAPHENTHEORIE
In graphentheoretische Formulierung kann man folgendes leichter zeigen: Jeder planare Graph (siehe unten) hat eine chromatische Zahl kleiner oder gleich 5. Diese Aussage kann verschärft werden, denn jeder planare Graph hat eine chromatische Zahl kleiner oder gleich 4. Während die erste Aussage innerhalb einiger Seiten und unter Anwendung eines Theorems von EULER über planare Graphen bewiesen werden kann, ist letztere extrem kompliziert nachzuweisen.

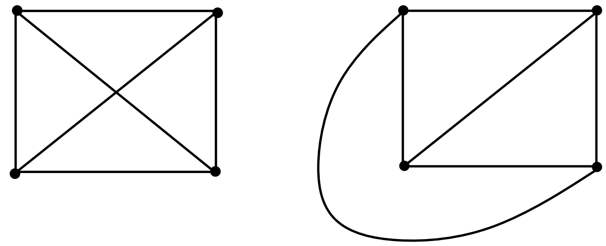

Abb. 10 Zeichnung eines planaren Graphen mit und ohne verbotene Schnittpunkte.

5.8 Planare Graphen

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Frage stellen, ob ein Graph in der Ebene "korrekt" gezeichnet werden kann, also so, daß alle Schnittpunkte zwischen Kanten auch Eckpunkte des Graphen sind.

229 Definition PLANARE GRAPHEN
Ein Graph (Digraph, Multigraph) heißt *planar (planar)*, wenn er in der Ebene gezeichnet werden kann, daß die Schnittpunkte der Verbindungskanten genau die Eckpunkte des Graphen sind. Verbindungskanten dürfen hierbei auch krummlinig sein.

Es kommt darauf an, daß es *möglich* ist, den Graphen auf einem Blatt Papier so zu zeichnen. Von einem planaren Graphen kann es durchaus Zeichnungen in der Ebene geben, bei der es neben den Eckpunkten auch andere Schnittpunkte von Verbindungskanten gibt. Wichtig ist, daß es überhaupt eine solche Zeichnung gibt, bei der die Schnittpunkte der Verbindungskanten genau die Eckpunkte sind.

230 Definition FLÄCHEN EINES PLANAREN GRAPHEN
Wenn wir einen planaren Graphen so aufzeichnen, daß die Schnittpunkte seiner Verbindungskanten genau seine Eckpunkte sind, dann beobachtet man an dieser Zeichnung folgendes Phänomen: Die Ebene wird durch die Verbindungskanten in zusammenhängende Teilbereiche unterteilt. Ein solcher Teilbereich heißt eine *Fläche (face)* des Graphen. Genau eine solche Fläche ist unendlich groß.

Man kann sich überlegen, daß die Anzahl dieser Flächen für einen bestimmten Graphen nicht davon abhängt, wie dieser Graph in der Ebene gezeichnet wurde. Einzige Voraussetzung ist nur, daß die Schnittpunkte der Verbindungskanten genau die Eckpunkte des Graphen sind. Die Anzahl der Flächen hängt also nicht von der Zeichnung, sondern nur vom Graphen selber ab. Sie heißt die *Flächenzahl (number of faces)* des Graphen.

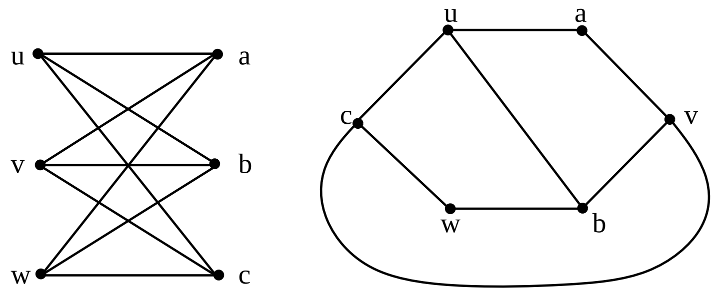

Abb. 11 Nichtplanarer Graph $K_{3,3}$ und planarer Zeichenversuch.

231 Theorem THEOREM VON EULER ÜBER PLANARE GRAPHEN
In jedem planaren Graphen gilt:

$$\text{Eckenzahl} - \text{Kantenzahl} + \text{Flächenzahl} = 2$$

232 Beispiel ZWEI BERÜHMTE NICHTPLANARE GRAPHEN
Die zwei wichtigsten nichtplanaren Graphen sind der $K_{3,3}$ und der K_5.

Wir wollen anhand der Abb. **??** verstehen, warum der $K_{3,3}$ nicht planar sein kann:

(1) Der $K_{3,3}$ enthält einen Zyklus der Länge 6, nämlich (u, a, v, b, w, c, u). In einer ebenen Zeichnung, in der die Schnitte der Verbindungskanten genau die Eckpunkte sein sollen, muß sich dieser Zyklus als eine Art Sechseck zeigen.

(2) Nun fehlen noch die Kanten (u, b), (v, c) und (w, a). Wir müssen sie so einzeichnen, daß dadurch keine "verbotenen Schnittpunkte" entstehen. Somit darf keine dieser Kanten das Sechseck schneiden, sie müssen alle jeweils ganz im Inneren oder ganz im Äußeren des Sechsecks liegen.

(3) Zeichnen wir also eine Kante im Inneren des Sechsecks ein, zum Beispiel also (u, b). (Hätten wir hier eine andere Kante genommen, so würde das ganz ähnlich weitergehen.)

(4) Wir sehen nun, daß von den verbleibenden Kanten keine weitere mehr im Inneren gezeichnet werden kann, ohne daß ein "verbotener Schnittpunkt" entsteht. Also zeichnen wir eine weitere Kante, etwa (v, c) im Außenbereich.

(5) Nun zeigt sich, daß sich die dritte und letzte verbleibende Kante weder im Außenbereich noch im Inneren des Sechsecks zeichnen läßt, ohne einen "verbotenen Schnittpunkt" einzuführen.

Also ist $K_{3,3}$ nicht planar.

233 Definition UNTERTEILUNG
Seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$ zwei Graphen. $\mathcal{U}$ heißt ein *Unterteilungsgraph (subdivision)* von $\mathcal{G}$, falls $\mathcal{U}$ aus $\mathcal{G}$ ausschließlich durch Hinzufügen von Eckpunkten vom Grad 2 entsteht, die auf bereits bestehende Kanten aufgesetzt werden.

234 Lemma UNTERTEILUNGSLEMMA
Man betrachte einen Graphen $\mathcal{G}$ und hiervon einen Unterteilungsgraphen $\mathcal{U}$. Dann sind entweder beide Graphen planar oder beide nicht planar. Der Übergang von einem Graphen zu seiner Unterteilung ändert nichts an den Planaritätseigenschaften. Der Übergang von einem Unterteilungsgraph zum ursprünglichen Graph ändert auch nichts an den Planaritätseigenschaften.

235 Theorem PLANARITÄTSKRITERIUM VON KURATOWSKI
Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder $K_{3,3}$, noch K_5, noch einen Unterteilungsgraphen dieser zwei Graphen als Teilgraph enthält. Alle Gründe, die verhindern können, daß ein Graph nicht planar ist, zeigen sich also bereits in den zwei Graphen $K_{3,3}$ und K_5.

236 Bemerkung TESTS AUF PLANARITÄT
Da es oft recht aufwendig ist, das Kriterium von KURATOWSKIzu überprüfen, benutzt man gerne auch andere Techniken:

(1) PLANARE ZEICHENVERSUCHE
Man versucht zunächst einmal, eine Zeichnung des Graphen zu finden, die keine "verbotenen Schnittpunkte" hat. Gelingt das, dann ist man fertig – der Graph ist planar. Gelingt das nicht, so versucht man, die nachfolgend angeführten einfachen Kriterien zu benutzen, um zu zeigen, daß der Graph nicht planar ist.

(2) 1. EULERKRITERIUM
Ist die dreifache Eckenzahl kleiner als Kantenzahl + 6, dann ist der Graph nicht planar.

(3) 2. EULERKRITERIUM
Ist 2 $*$ Eckenzahl kleiner als Kantenzahl + 4 und enthält der Graph keine Dreiecke, dann ist der Graph nicht planar.

(4) 3. EULERKRITERIUM
Hat der Graph nur Eckpunkte vom Grad 6 oder größer, dann ist der Graph nicht planar.

(5) KURATOWSKI KRITERIUM
Haben die bisherigen Kriterien noch keine Aussage ermöglicht, so hat man Pech gehabt, und muß das Kriterium von KURATOWSKI benutzen.

Ein nichtzusammenhängender Graph ist übrigens genau dann planar, wenn jede Zusammenhangskomponente planar ist. In diesem Fall muß man also obige Tests auf jeder Zusammenhangskomponente ausführen.

237 Bemerkung ANWENDUNGEN DER PLANARITÄT

(1) ZEICHNEN VON GRAPHEN
Zeichnet man einen Graphen am Bildschirm, so strebt man eine Darstellung mit einer möglichst geringen Anzahl von "verbotenen Schnittpunkten" an. Ist der Graph planar, dann gibt es sogar eine Darstellung ohne "verbotene Schnittpunkte". Es stellen sich weiterführende Fragen:

- Wenn ein Graph planar ist, wie finde ich dann tatsächlich eine Zeichnung, die keine verbotenen Schnittpunkte enthält?
- Wenn ein Graph leider nicht planar ist, was ist die geringste Zahl "verbotener Schnittpunkte", die bei einer planaren Darstellung des Graphen mindestens auftreten muß?
- Wie finde ich bei nicht planaren Graphen eine Zeichnung mit minimaler Anzahl "verbotener Schnittpunkte"?

(2) LAYOUT VON LEITERPLATTEN
Leiterplatten bestehen aus einer Kunststoffschicht, die einseitig mit Kupferbahnen belegt und mit elektronischen Bauelementen bestückt ist. Der Schaltplan ist ein Graph, bei dem die Eckpunkte die Anschlußpunkte der Bauelemente darstellen und die Kupferbahnen die Verbindungskanten. Das geometrische Layout einer Leiterplatte entspricht also einer Zeichnung des Schaltplangraphens. Verbotene Schnittpunkte dürfen in dieser Zeichnung nicht auftreten, da diese unerwünschte elektrische Verbindungen darstellen und Kurzschlüsse verursachen. Nur planare Schaltplangraphen können also auf einer Seite einer Leiterplatte untergebracht werden. Bei nicht planaren Graphen muß man zu Drahtbrücken greifen oder die Rückseite der Leiterplatte benutzen.

(3) LAYOUT VON INTEGRIERTEN SCHALTKREISEN
Ein analoges Problem stellt sich beim Entwurf integrierter Schaltungen. Da hier die Zahl der zu verbindenden Bauelemente bis zu einigen Millionen betragen kann, hat man hier ein extrem kompliziertes Problem zu lösen, das unter Umständen mehrere Tage bis Wochen Rechenzeit von Superrechnern benötigen kann.

(4) PLANUNG VON VERKEHRSWEGEN, EISENBAHNEN UND AUTOBAHNEN
Verbindungspläne von Verkehrswegen wie Eisenbahnen und Autobahnen sind Graphen. Bei planaren Graphen kann man die entsprechenden Verkehrswege realisieren, ohne daß Brücken gebaut werden müssen. Ist das nicht möglich, so ist man an einer minimalen Zahl von (teuren) Brücken interessiert.

5.9 Bäume und Wälder

Bäume und Wälder sind Strukturen, die in der Informatik sehr häufig benötigt werden. Man kann sie als Graphen, aber auch als Relationen modellieren.

238 Definition BÄUME UND WÄLDER ALS SPEZIELLE GRAPHEN
Ein *Baum (tree)* ist ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen. Ein *Wald (forest)* ist ein Graph ohne Zyklen. Seine Zusammenhangskomponenten sind Bäume.

239 Definition SPANNENDE BÄUME
Sei (P, Γ) ein zusammenhängender Graph. Ein *spannender Baum (spanning tree)* ist ein Teilgraph von (P, Γ), der ein Baum ist und alle Eckpunkte des Graphen enthält, also ein Baum der Form (P, Δ) mit $\Delta \subseteq \Gamma$.

Bei attributierten Graphen kann man den spannenden Bäumen Werte zuweisen. Sind für den Graphen etwa Weglängen angegeben, dann hat jeder spannende Baum eine Weglängensumme. Oft interessiert man sich für jene spannenden Bäume, bei denen dieser Wert minimal ist. Dann spricht man von *minimalen spannenden Bäumen (minimal spanning trees)*.

240 Definition BÄUME UND WÄLDER ALS SPEZIELLE RELATIONEN
Ein *Wald (forest)* ist ein Paar (P, Δ) aus einer endlichen Menge P von Punkten und einer azyklischen Relation $\Delta \subseteq P \times P$, bei der jeder Punkt hat höchstens einen Vorgänger hat.

Elemente $b \in P$, die keinen Nachfolger haben, heißen die *Blätter (leaves)* des Waldes, Elemente $r \in P$, die keinen Vorgänger haben, heißen *Wurzeln (roots)* des Waldes. Ein Wald mit genau einer Wurzel heißt ein *Baum (tree)*.

241 Satz EIN GRAPHENBAUM IST EIN RELATIONENBAUM
Sei (P, Γ) ein Baum im Sinne eines speziellen Graphen. Dann fehlen diesem Baum offenbar zwei Konzepte:

(1) Es ist nicht ganz klar, was die *Wurzel* des Baumes ist. Betrachten von Abb. **??** legt nahe, daß prinzipiell jeder Punkt die Rolle der Wurzel spielen könnte.

(2) Es fehlt eine *Orientierung* auf den Kanten, die es erlaubt, von Vorgänger und Nachfolger zu sprechen. Betrachten der Abb. **??** legt nahe, daß sich diese automatisch ergibt, sobald eine Wurzel für den Baum gewählt wurde.

Wählt man in einem Baum (P, Γ) im Sinne eines speziellen Graphen einen Punkt $r \in P$ speziell aus, dann läßt sich dazu ein entsprechender Baum (P, Δ) im Sinne einer Relation konstruieren. Hierzu definiert man zunächst eine *Niveaufunktion*

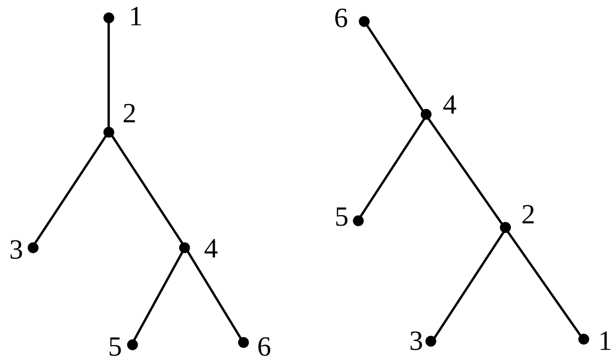

Abb. 12 Freie Auswahl der Wurzel bei einem Graphenbaum.

$n_r : P \to \mathrm{N}_0$, welche die Entfernung eines Punktes von der Wurzel angibt: $n_r(p) :=$ die *minimale Länge eines Weges im Graphen* (P, Γ)*, der die Wurzel* r *mit dem Punkt* p *verbindet*. Dann definiert man die Relation Δ durch

$$(p, q) \in \Delta \;\Leftrightarrow\; (p, q) \in \Gamma \;\wedge\; n_r(p) + 1 = n_r(q)$$

Für dieses Δ gilt dann:

(1) (P, Δ) ist ein Baum im Relationssinn.

(2) (P, Δ) hat r als Wurzel.

(3) Ist der Punkt p ein Vorgänger des Punktes q im Relationsbaum, ist also $(p, q) \in \Delta$, dann sind p und q im Graphenbaum durch eine (ungerichtete) Kante verbunden.

(4) Sind p und q im Graphenbaum durch eine (ungerichtete) Kante verbunden, dann ist entweder p Vorgänger von q oder q Vorgänger von p im Relationenbaum. Was genau der Fall ist, wird nur durch die Wahl des Punktes r zur Wurzel bestimmt.

242 Satz Ein Relationenbaum ist ein Graphenbaum

In der umgekehrten Richtung starten wir mit einem Relationenbaum (P, Δ). Bei diesem ist klar, welcher Punkt die Wurzel ist, und die Relation erlaubt, von Vorgängern und Nachfolgern zu sprechen. Definieren wir nun die Relation $\Gamma \subseteq P \times P$ als die symmetrische Hülle von Δ, also $\Gamma := < \Delta >_s$, so erhalten wir einen Graphen (P, Γ), der ein Baum im Graphensinn ist. Für diesen gilt dann:

(1) (P, Γ) ist ein Baum im Graphensinn.

(2) Ist der Punkt p ein Vorgänger des Punktes q im Relationsbaum, ist also $(p, q) \in \Delta$, dann sind p und q im Graphenbaum durch eine (ungerichtete) Kante verbunden.

243 Bemerkung Zusammenhang zwischen den Definitionen
Das Konzept eines Baumes läßt sich also durch zwei unterschiedliche Strukturen formalisieren. Der Baum im Graphensinn erlaubt noch die freie Wahl eines Elements zur Wurzel des Baumes, beim Baum im Relationensinn ist bereits klar, was die Wurzel ist.

Da man zumeist auch an der Wurzel eines Baumes interessiert ist, bedient man sich oft der Relationsdefinition, spricht aber auch gleichzeitig über Eigenschaften von Bäumen, die eigentlich nur für Graphen definiert sind. Hierfür ist dann die Graphendefinition zu benutzen.

Bei Bäumen spricht man oft von *Knoten (nodes)* statt von Punkten. Ist die Orientierung der Kanten nach Wahl einer Wurzel klar, so nennt man die Nachfolger auch *Kinder oder Söhne (children, son nodes)* und die Vorgänger auch *Väter (Elternknoten, parent nodes)*. Ein Knoten heißt ein *Bruder (brother node)* eines Knotens, wenn beide Knoten denselben Vater haben.

244 Definition Geordneter Baum
Ein *geordneter Baum* ist ein Baum (im Relationssinn) mit einer geeigneten Zusatzstruktur, die für jeden Knoten eine lineare Ordnung für seine Nachfolgerknoten angibt. Wie wir das technisch-formal tun, ist im Grunde genommen gleichgültig. Wir haben hier mehrere Möglichkeiten:

(1) Angabe einer linearen Ordnungsrelation $\leq \subseteq P \times P$ auf der ganzen Knotenmenge P des Baumes.

(2) Angabe einer linearen Ordnungsrelation für die Nachfolgermenge jedes Knotens. Ist also $p \in P$ ein Knoten des Baumes (P, Δ), dann ist auf der Menge $\{x \in P \mid (p, x) \in \Delta\}$ eine Ordnungsrelation $\leq_p$ gegeben.

(3) Angabe einer Ordnungsrelation $\leq \subseteq P \times P$ auf der ganzen Knotenmenge P des Baumes, die eingeschränkt auf die Nachfolgermenge eines jeden Knotens eine lineare Ordnungsrelation ist.

Man beachte, daß die meisten Bäume, die man in der Informatik benutzt, geordnete Bäume sind, ohne daß man sich dieser Tatsache sofort bewußt wird. Das liegt daran, daß in jedem Baum, den wir aufzeichnen, bereits durch die Tatsache, daß wir einen Teilbaum links und einen anderen rechts zeichnen, implizit eine Ordnung ausgedrückt wird.

245 Bemerkung Isomorphie geordneter und ungeordneter Bäume
Zwei Bäume (im Relationssinn) heißen *isomorph*, wenn sie als Graphen isomorph sind und der Isomorphismus die Wurzel des einen Baums auf die Wurzel des anderen

Baums abbildet.

Die Zusatzstruktur der Ordnung hat Konsequenzen für die Isomorphie. Bäume, die als Bäume isomorph sind, können als geordnete Bäume sehr wohl verschieden sein: Die beiden Bäume

```
     0                 0
    / \               / \
   0   0             0   0
      / \           / \
     0   0         0   0
```

sind als Bäume isomorph. Als geordnete Bäume wollen wir sie nicht mehr als isomorph ansehen. Dementsprechend muß eine solche Definition auch aussehen. Ein Isomorphismus geordneter Bäume muß also sowohl ein Isomorphismus der Bäume sein als auch die Ordnungsstruktur erhalten.

Versuchen Sie, diese anschaulichen Definitionen zu formalisieren.

246 Definition TRAVERSIERUNG VON BÄUMEN
Sei (P, Δ) ein Baum (im Relationssinn) mit Wurzel $\surd \in P$. Eine *Traversierung (traversal)* des Baumes (P, Δ) ist eine endliche Folge aller Knoten des Baumes, die mit der Wurzel beginnt: $(\surd, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, wobei $P = \{\surd, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Bei attributierten Bäumen interessiert in vielen Fällen nicht die Folge der Knoten selber, sondern die Folge der zugehörigen Attributwerte.

247 Definition STANDARDTRAVERSIERUNGEN GEORDNETER BÄUME
Auf geordneten Bäumen gibt es zwei wichtige Traversierungen: *Tiefensuche (Depth-first)* und *Breitensuche (Breadth-first)*. Informal sind sie folgendermaßen definiert:

Depth-first:

(1) Beginne mit der Wurzel als aktuellem Knoten und schreibe die Wurzel in die Traversierung.

(2) Wähle von den noch nicht in die Traversierung geschriebenen Kindern des aktuellen Knotens das gemäß der Ordnung kleinste. Dies ist der neue aktuelle Knoten. Schreibe diesen in die Traversierung.

(3) Hat ein aktueller Knoten keine noch nicht in die Traversierung geschriebenen Kinder mehr (also entweder hat er überhaupt keine Kinder oder all seine Kinder sind bereits bearbeitet worden), dann wähle wieder seinen Vater zum aktuellen Knoten. Diesmal wird der Knoten aber nicht mehr in die Traversierung geschrieben.

(4) Verfahre gemäß Regel (2) und (3), bis alle Knoten des Baumes einmal aktuelle Knoten waren.

Breadth-first:

(1) Beginne mit der Wurzel als einzigem Knoten in einer Arbeitsliste. Schreibe die Wurzel in die Traversierung.

(2) Ersetze der Reihe nach jeden Knoten der Arbeitsliste durch seine Kinder in der durch die Ordnung vorgegebenen Reihenfolge und schreibe diese gleichzeitig in die Traversierung.

(3) Hat ein Knoten keine Kinder, so verschwindet er aus der Arbeitsliste.

(4) Verfahre gemäß Regel (2) und (3), bis die Arbeitsliste die leere Liste ist.

248 Definition KLAMMERSPRACHE
Wir betrachten die Sprache aus Klammerpaaren, die anschaulich beschrieben sei durch:

(1) `()` liegt in der Sprache.

(2) Liegen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Sprache, dann auch $(x_1 x_2 \cdots x_n)$

Beispiele für Elemente dieser Sprache sind:

```
()
(())
((())()((())))
```

Jedem Klammerausdruck entspricht ein geordneter Baum. Die Ordnung ergibt sich aus der linearen Notation der Klammern.

249 Bemerkung BAUMDARSTELLUNG ARITHMETISCHER AUSDRÜCKE
Arithmetische Ausdrücke können als Klammerausdrücke angesehen werden und als knotenattributierte Bäume dargestellt werden. Wir werden dies bei den formalen Sprachen noch genauer besprechen.

Aufgrund der Klammerung und der üblichen Prioritätsregeln wie etwa "$*$ vor $+$" ist klar, in welcher Reihenfolge ein arithmetischer Ausdruck auszuwerten ist. Wir nehmen nun stets den jeweils zuletzt auszuwertenden Operator, den "top-level" Operator. Ist dieser ein binärer Operator, so zeichnen wir einen Knoten mit dem Operatorzeichen als Attribut und zwei Kindern: Der Baum des linken Teilterms und des rechten Teilterms bilden die linken und rechten Kinder. Sind wir letztlich bei einer Zahl oder einer Variablen angelangt, so zeichnen wir einen kinderlosen Knoten mit der Zahl oder dem Variablennamen als Attribut.

Achtung: Die Operatoren und Variablen sind hier nicht die Knoten des Baumes sondern die Attribute der Knoten, sonst könnte man im Baum des arithmetischen Ausdrucks $(a + a) * (a + a)$ die einzelnen $+$ und a nicht voneinander unterscheiden.

Bemerkt man in einem Ausdruck *gemeinsame Teilausdrücke (common subexpressions)*, so wird man diese nur einmal berechnen. Will man dies im Graph andeuten, so faßt man die entsprechenden Teile des Baumes zusammen. Die sich ergebenden Graphen sind allerdings keine Bäume mehr, sondern gerichtete, azyklische Graphen. Die Richtungsinformation stammt von der Wurzel, die das zu berechnende Endergebnis ist, und kann als Abhängigkeit der Teilausdrücke voneinander gedeutet werden.

Bäume und Graphen dieser Art werden bei optimierenden sowie parallelisierenden und/oder vektorisierenden Compilern, in den Auswertungsfunktionen bei Spreadsheets und in vielen anderen Situationen benutzt.

250 Definition BINÄRE BÄUME
Ein Baum (im Relationssinn) heißt *binär (binary)*, wenn jeder Knoten höchstens zwei Kinder hat.

Ein binärer Baum heißt *perfekt* oder *voll*, wenn für jeden Knoten die Zahl der Knoten im linken und rechten Teilbaum gleich sind. Insbesondere heißt das, daß jeder Knoten entweder ein Blatt ist oder genau zwei Kinder hat.

251 Definition AUSGEGLICHENE BÄUME
Ein Baum heißt *vollständig ausgeglichen (completely balanced)*, wenn sich für jeden Knoten die *Zahl der Knoten* seiner Teilbäume um höchstens 1 unterscheiden.

Die *Höhe (height)* eines Baumes ist der größte Wert, den die Niveaufunktion des Baumes annehmen kann, also die maximale Entfernung von der Wurzel zu einem Blatt. Ein Baum, der nur aus der Wurzel selber besteht, hat somit die Höhe 0, ein Baum aus Wurzel und einem Sohn hat die Höhe 1.

Ein Baum heißt *ausgeglichen (balanced)* oder nach den Entdeckern Adelson-Velskii und Landis auch ein *AVL–Baum (AVL tree)*, wenn sich für jeden Knoten die *Höhen* seiner Teilbäume um höchstens 1 unterscheiden.

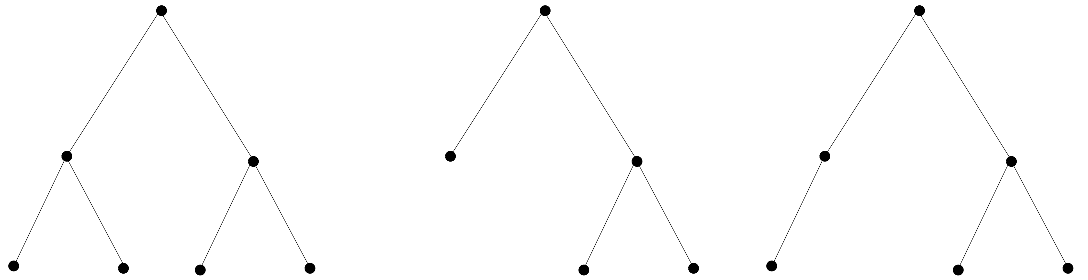

Abb. 13 Perfekter, AVL und ausgeglichener Binärbaum.

252 Beispiel PERFEKTE BINÄRE BÄUME

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen perfekten, binären Baum der Höhe n. Dieser Baum besteht aus $2^{n+1} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ Knoten und 2^n Blättern.

(2) Hat ein perfekter, binärer Baum k Knoten, so ist k in der Form $k = 2^{n+1} - 1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ darstellbar, und n ist die Höhe des Baumes.

(3) Die Höhe eines perfekten, binären Baumes mit k Knoten ist $\log_2(k+1) - 1$.

(4) Die Höhe eines perfekten, binären Baumes mit b Blättern ist $\log_2(b)$.

253 Beispiel VERANSCHAULICHUNG AUSGEGLICHENER BÄUME

Zeichnen Sie für $n = 1$ bis $n = 7$ alle vollständig ausgeglichenen, binären Bäume mit n Knoten. Zeichnen Sie für $n = 1$ bis $n = 7$ alle ausgeglichenen, binären Bäume mit n Knoten.

254 Beispiel FIBONACCI BÄUME

Betrachten Sie die sogenannten FIBONACCI *Bäume*:

(1) Ein einzelner Knoten ist ein FIBONACCI Baum, der nur aus seiner Wurzel selber besteht. Er hat die Höhe 0 und einen Knoten.

(2) Der Baum aus einer Wurzel und einem Kind ist ein FIBONACCI Baum. Er hat die Höhe 1 und zwei Knoten.

(3) Ist B_h ein FIBONACCI Baum der Höhe h und B_{h-1} ein FIBONACCI Baum der Höhe $h-1$, dann kann man einen neuen FIBONACCI Baum der Höhe $h+1$ konstruieren, in dem man einen neuen Knoten als neue Wurzel anschreibt und die Wurzeln der zwei FIBONACCI Bäume B_h und B_{h-1} zu Söhnen dieses neuen Knotens macht.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(1) Begründen Sie, warum es zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl a genau einen FIBONACCI Baum der Höhe a gibt.

(2) Konstruieren Sie alle FIBONACCI Bäume der Höhen 1 bis 6.

(3) Bestimmen Sie alle vollständig ausgeglichenen FIBONACCI Bäume.

(4) Zeigen Sie durch strukturelle Induktion über die Bildungsvorschrift, daß jeder FIBONACCI Baum ein ausgeglichener Baum ist.

(5) Die Bedeutung der FIBONACCI Bäume liegt in der Tatsache, daß sie die "schlechtesten" AVL–Bäume sind und als solche für Analysen von Suchverfahren in AVL–Bäumen für die worst-case Analyse herangezogen werden. Wie interpretieren Sie die Aussage, daß die FIBONACCI Bäume die schlechtesten AVL–Bäume sind?

(6) Bezeichne $L(h)$ die Anzahl der Knoten des FIBONACCI Baumes der Höhe h. Geben Sie eine Rekursionsgleichung für L an. Die Zahlen $L(h)$ heißen LEONARDO *Zahlen*. Vergleichen Sie deren Rekursionsgleichung mit jener der FIBONACCI *Zahlen* $F(n)$: $F(1) = 1$, $F(2) = 2$, $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$. (In manchen Büchern mit leicht anderer Verankerung definiert!)

255 Beispiel DARSTELLUNG VON BÄUMEN

Ein Programmierer verwendet folgende Technik zur Darstellung eines geordneten Binärbaumes, dessen Knoten Attribute aus positiven, ganzen Zahlen haben:

(1) Es wird ein Feld T ganzer Zahlen geeigneter Länge angelegt.

(2) Im Element T[1] steht jene ganze Zahl, die Attribut der Wurzel ist.

(3) Steht im Element T[i] das Attribut eines beliebigen Knotens, dann steht das Attribut seines linken Kindes im Element T[2∗i] und seines rechten Kindes im Element T[2∗i+1]. Falls ein Knoten keinen linken oder rechten Nachfolgerknoten besitzt, so wird das dadurch angedeutet, daß man 0 in das entsprechende Feld einspeichert. 0 kann ja nicht als Attribut auftauchen, da dieses eine positive ganze Zahlen sein soll.

Beantworten Sie nun die folgenden Fragen:

(1) Zeichnen Sie einen perfekten Baum der Höhe 3 und versehen Sie seine Knoten mit paarweise unterschiedlichen, positiven ganzen Zahlen als Attribute. Geben Sie das Feld T an, durch das dieser Baum dargestellt wird.

(2) Wie (1), nur nehmen Sie nun einen AVL–Baum, der nicht vollständig ausgeglichen ist.

(3) Was ist die minimale Länge des Feldes, in dem man einen Baum mit 10 Knoten unterbringen kann? Zeichnen Sie einen Beispielbaum und geben Sie das Feld T an.

(4) Was ist die maximale Länge des Feldes, die man für einen Baum mit 10 Knoten benötigen könnte? Zeichnen Sie einen Beispielbaum und geben Sie das Feld T an.

256 Definition TRAVERSIERUNGEN GEORDNETER, BINÄRER BÄUME
Bei *geordneten, Binärbäumen* kennt man neben Depth-first und Breadth-first noch die *Inorder*, *Preorder* und *Postorder* Traversierungen. Wir geben diese Traversierungen als deutschsprachige Regeln und als selbsterklärende rekursive Pseudocode Programme an:

Inorder:
Zuerst den linken Teilbaum, dann in der Mitte die Wurzel und zum Schluß den rechten Teilbaum.

```
inorder (node):
BEGIN
IF left–child–exists (node) THEN inorder (left (node)) FI;
write (node);
IF right–child–exists (node) THEN inorder(right (node)) FI;
END.
```

Preorder:
Zuerst die Wurzel, dann den linken Teilbaum und zuletzt den rechten Teilbaum.

```
preorder (node):
BEGIN
write (node);
IF left–child–exists (node) THEN preorder (left (node)) FI;
IF right–child–exists (node) THEN preorder (right (node)) FI;
END.
```

Postorder:
Zuerst den linken Teilbaum, dann den rechten Teilbaum und zuletzt die Wurzel.

```
postorder (node):
BEGIN
IF left–child–exists(node) THEN postorder (left (node)) FI;
IF right–child–exists(node) THEN postorder (right (node)) FI;
```

write (node);
END.

257 Beispiel BEISPIEL
Traversierungen des folgenden geordneten Binärbaumes:

```
     A
    / \                     Inorder:    B A E D F
   B   D                    Preorder:   A B D E F
      / \                   Postorder:  B E F D A
     E   F
```

Man beachte insbesondere, daß Preorder und Postorder nicht zueinander reversierte Folgen ergeben.

258 Beispiel KLAMMERN UND INORDER TRAVERSIERUNGEN
Man beachte, daß die Inorder Traversierung des Baumes eines arithmetischen Ausdrucks weniger Information beinhalten kann als der arithmetische Ausdruck und der Baum. Man mache sich das an der Zeichenfolge `2 * 3 / 4 * 2 - 1 + 9` klar:

(1) Man zeichne den Baum des Ausdrucks $(2*3)/(4*2-(1+9))$.

(2) Man zeichne den Baum des Ausdrucks $((2*3)/4*2)-(1+9)$.

(3) Man weise nach, daß obige Zeichenfolge die Inorder Traversierung der unterschiedlichen Ausdrücke und unterschiedlichen Bäume (1) und (2) ist.

(4) Man zeichne den Baum des Ausdrucks $2*3/4*2-1+9$ und zeige, daß sich keiner der zwei Ausgangsbäume ergibt, gleich welche Prioritätsregeln man zwischen $*$ und / benutzt.

259 Beispiel MEHRDEUTIGE POSTORDER REKONSTRUKTION
Auch die Postorder Traversierung enthält weniger Information als der Baum:

(1) Zeichnen Sie zwei unterschiedliche geordnete Binärbäume, deren Postorder Traversierung die Knotenfolge `B E F D A` ist.

(2) Zeichnen Sie einen geordneten Binärbaum, dessen Postorder Traversierung die Knotenfolge `B E F D A` ist und bei dem die Knoten B, E und F Blätter sind.

(3) Ist die Rekonstruktionsaufgabe, die in (1) noch mehrere Lösungen hatte, durch die Zusatzangaben in (2) eindeutig geworden?

260 Bemerkung Eindeutige Postorder Rekonstruktion
Wie obiges Beispiel nahelegt, kann man aus der *Postorder Traversierung* eines Binärbaumes zusammen mit der Zusatzinformation, *welche Knoten Blätter* sind, eindeutig den zugehörigen *Baum rekonstruieren*. Dies hat sehr wichtige Konsequenzen in der Informatik:

(1) Postfixnotation (Umgekehrte Polnische Notation, RPN)
Bei arithmetischen Ausdrücken ist klar, daß die *Blätter* genau die Knoten sind, deren Attribute *Zahlen* sind, und die *Nichtblätter* genau die Knoten sind, deren Attribute *Operatoren* sind. Somit kann man aus der Postorder Traversierung den arithmetischen Ausdruck vollständig rekonstruieren und berechnen. Insbesondere erlaubt also die Postorder Traversierung eine Notation arithmetischer Ausdrücke ohne Klammersetzung.

`2 3 * 4 2 1 - * 5 + +` ist der arithmetische Ausdruck $2*3+[4*(2-1)+5]$. Die Abarbeitung dieses Ausdrucks benutzt einen Kellerspeicher[6] und die zwei Regeln

- Kommt eine Zahl, so schreibe die Zahl mittels **push** den Keller.
- Kommt ein Operator, so ziehe zwei Elemente mittels **pop** vom Keller, werte den Operator auf auf dem 2. und 1. Element des Kellers in genau dieser Reihenfolge aus, und schreibe das Resultat wieder auf den Keller.

Diese Technik wird bei Taschenrechnern der Firma Hewlett-Packard benutzt und heißt auch Umgekehrte Polnische Notation. Achtung, das unäre Minus (wie in -5) benötigt eine Sonderbehandlung, ebenso Funktionsanwendungen wie etwa die des Sinus.

(2) Codegenerierung im Compiler
Wenn ein Compiler Code zur Berechnung von $(x+y)*z$ generiert, so entsteht je nach Architektur etwas Ähnliches wie

```
LADE-IN-DEN-AKKU x
ADDIERE-ZUM-AKKU-DAZU y
MULTIPLIZIERE-ZUM-AKKU-DAZU z
```

Für Zwischenresultate wird, falls erforderlich, eine Stack–Struktur, andere Register oder der Hauptspeicher benutzt. Die Reihenfolge der Operationen entspricht aber der Postorder Traversierung, weshalb die meisten Compiler die Ausdrücke in diese Darstellung umwandeln.

[6] Siehe Definition ??.

(3) Sprachen in Postfixnotation
Manche Sprachen, so etwa FORTH, sind gänzlich um die Postfixnotation herum konstruiert. Solche Sprachen lassen sich sehr einfach interpretieren.

261 Beispiel Postfixnotation
Betrachten Sie die zwei Postorder Traversierungen `1 2 3 4 5 + * - /` und `1 3 - 4 + 2 3 4 1 - * - +`.

(1) Werten Sie diese Ausdrücke nach dem Stack–Mechanismus aus.

(2) Zeichnen Sie die zugehörigen Bäume auf, und schreiben Sie die Ausdrücke in üblicher mathematischer Notation mit Klammern auf.

(3) Geben Sie die Inorder und Preorder Traversierungen an.

262 Beispiel Programm
Schreiben Sie ein Programm, das die Funktionsweise eines RPN Rechners simuliert, also den Wert eines in Postorder eingegebenen arithmetischen Ausdrucks berechnet. Erweitern Sie nun das Programm so, daß es den arithmetischen Ausdruck in üblicher mathematischer Notation mit Klammern ausgibt.

263 Beispiel Präfixnotation
Betrachten Sie die Preorder Traversierungen `- + 2 3 * - 5 1 2` und `* - 4 3 - * 2 3 + * 5 2 - 1 2`.

(1) Zeichnen Sie die zugehörigen Bäume auf und schreiben Sie die zugehörigen Ausdrücke in üblicher mathematischer Notation mit Klammern auf.

(2) Geben Sie die Inorder und Postorder Traversierungen an.

264 Beispiel Logische Ausdrücke
Betrachten Sie den logischen Ausdruck $\neg(A \wedge (B \Rightarrow C))$. Erstellen Sie den Baum dieses Ausdrucks und dessen Preorder- und Postordertraversierungen.

265 Beispiel Transformation von Notationen

(1) Überlegen Sie sich unter Anwendung des beschriebenen Stack Mechanismus einen Algorithmus (als Regel und als Programm), der eine Postorder Traversierung des Baumes eines arithmetischen Ausdrucks in die übliche mathematische Notation mit Klammern umwandelt.

(2) Geben Sie zwei arithmetische Ausdrücke an, deren Preorder Traversierungen nicht die Umkehrungen ihrer Postorder Traversierungen sind.

(3) Überlegen Sie sich einen Algorithmus (als Regel und als Programm), der eine Preorder Traversierung des Baumes eines arithmetischen Ausdrucks in eine Postorder Traversierung umwandelt. Beachten Sie, daß wegen (2) eine Reversierung der Folge nicht ausreicht!

266 Bemerkung SUCHBÄUME
Binärbäume, insbesondere ausgeglichene Bäume und Verallgemeinerungen wie B-Bäume, B*-Bäume, B+-Bäume und so weiter haben extrem große Bedeutung bei Such- und Sortieralgorithmen und für schnelle Zugriffsstrukturen in Datenbanken. Ohne die komplexe Theorie dieser Bäume wäre es unmöglich, ein effizientes Datenbanksystem zu implementieren. Entsprechende Techniken findet man in der einschlägigen Literatur.

267 Beispiel EINIGE SPEZIELLE EIGENSCHAFTEN
Bäume haben eine Reihe spezieller Eigenschaften, die der Leser in Ruhe überdenken, an Beispielen untersuchen und durch Argumentationen beweisen sollte:

(1) Ist jeder Baum ein planarer Graph?

(2) Welche chromatischen Zahlen können Bäume haben?

(3) Welche chromatischen Indizes können binäre Bäume haben?

(4) Welche chromatischen Indizes können beliebige Bäume haben?

(5) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat ein Baum?

(6) Kann ein Baum bizusammenhängend sein?

268 Beispiel BÄUME ALS VERBINDUNGSSTRUKTUREN
In manchen Multiprozessorsystemen werden Bäume als Verbindungsstrukturen benutzt, da auf solchen Strukturen verschiedene Berechnungen effizient ausgewertet werden können. Untersuchen Sie die verschiedenen Konsequenzen dieser Wahl:

(1) Zeichnen Sie einen vollkommen ausgeglichenen Binärbaum, der 15 Knoten enthält.

(2) Überlegen Sie sich anschaulich, wie auf einem Multiprozessor aus 15 Rechnern mit der Verbindungsstruktur eines Binärbaumes der folgende Ausdruck effizient ausgerechnet werden könnte: $(\sin(1)+\cos(2)+\tan(3)+\cot(4))*(\exp(8)*\ln(8)+\sqrt{(2)})$. Nehmen Sie hierzu an, daß der Zeitaufwand zur Berechnung einer Funktion deutlich größer ist als derjenige zur Kommunikation eines Zahlenwertes.

(3) Begründen Sie anschaulich, warum Bäume gerne als Verbindungsstrukturen in Multiprozessoren eingesetzt werden.

(4) Welche kritischen Kanten und kritischen Punkte hat ein Baum?

(5) Welche Zusammenhangszahlen und welche Kantenzusammenhangszahlen treten bei Bäumen auf? Welche Konsequenzen hat das beim Ausfall eines Knotens oder einer Verbindungskante?

(6) Begründen Sie, warum Bäume selten als Verbindungsstrukturen bei Rechnernetzen eingesetzt werden, bei denen mit Ausfällen von Verbindungsleitungen oder Knotenrechnern gerechnet werden muß.

(7) Welche Nachteile einer baumartigen Verbindungsstruktur für Multiprozessoren sehen Sie?

5.10 PETRI–Netze

PETRI–Netze sind eine Technik zur Darstellung paralleler und verteilter Prozesse. Wir betrachten Aktionen, die gleichzeitig stattfinden können. Jede Aktion bedeutet, daß das Gesamtsystem in einen neuen Zustand übergeführt wird. Eine Aktion wird in der PETRI–Netz–Theorie durch eine sogenannte *Transition (transition)* modelliert. Sie wird graphisch als dicker Strich symbolisiert.

Aktionen können nur eintreten, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Eine Bedingung wird in der PETRI–Netz–Theorie durch eine sogenannte *Stelle (place)* modelliert. Graphisch wird sie durch einen Kreis symbolisiert.

Der Zustand eines Systems wird durch die vorherrschenden gültigen Bedingungen modelliert. Eine gültige Bedingung wird in der PETRI–Netz–Theorie durch Markierungen der zugehörigen Stellen durch *Marken (token)* symbolisiert. Graphisch wird die Markierung einer Stelle durch einen fetten Punkt dargestellt. Eine Stelle darf auch mehrere Marken tragen.

Es gibt übrigens eine Reihe anderer Varianten von PETRI–Netzen, die sich in etlichen technischen Details von dem hier Dargestellten unterscheiden.

269 Definition STRUKTUR DER PETRI-NETZEN
Ein PETRI–*Netz* ist ein Quadrupel $(S, T, \Gamma_{SNT}, \Gamma_{TNS})$ aus

(1) einer nichtleeren, endlichen Menge S von *Stellen*,

(2) einer nichtleeren, endlichen Menge T von *Transitionen*,

(3) einer Relation $\Gamma_{SNT} \subseteq S \times T$ von den *Stellen auf die Transitionen* und

(4) einer Relation $\Gamma_{TNS} \subseteq T \times S$ von den *Transitionen auf die Stellen.*

Die Menge der Stellen und die Menge der Transitionen ist disjunkt: $S \cap T = \emptyset$.

Ist $s \in S$ eine Stelle und $t \in T$ eine Transition, dann verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

${}^\bullet t := \{s \in S \mid (s,t) \in \Gamma_{SNT}\}$ die Menge der *Eingangsstellen* der Transition t.

$t^\bullet := \{s \in S \mid (t,s) \in \Gamma_{TNS}\}$ die Menge der *Ausgangsstellen* der Transition t.

${}^\bullet s := \{t \in T \mid (t,s) \in \Gamma_{TNS}\}$ die Menge der *Eingangstransitionen* der Stelle s.

$s^\bullet := \{t \in T \mid (s,t) \in \Gamma_{SNT}\}$ die Menge der *Ausgangstransitionen* der Stelle s.

Anschaulich ist ein Petri–Netz ein *bipartiter Digraph* mit einer Bipartition, deren zwei Mengen Stellen und Transitionen heißen, und einer Attributierung der Stellen.

270 Definition Statik der Petri–Netze
Eine Funktion $M : S \to \mathrm{N}_0$ von den Stellen eines Petri–Netzes in die natürlichen Zahlen heißt eine *Markierung (marking)* des Petri–Netzes. M gibt zu jeder Stelle $s \in S$ die Anzahl der Marken an, die auf der Stelle s liegen.

Eine Stelle $s \in S$ heißt *markiert unter der Markierung* M, wenn s durch M mit mindestens einer Marke belegt ist: $M(s) > 0$.

Eine Transition $t \in T$ heißt *aktiviert durch die Markierung* M, wenn jede Eingangsstelle von t markiert ist: $\forall s \in {}^\bullet t \; M(s) > 0$.

271 Definition Dynamik der Petri-Netze
Das Petri–Netz trage die Markierung M. Wenn es eine Transition $t \in T$ gibt, die durch diese Markierung aktiviert ist, dann kann das Petri–Netz *schalten*: Einige Marken wechseln ihre Stellen und wir erhalten eine neue Markierung M'. Sollten mehrere Transitionen durch eine Markierung aktiviert sein, so gibt es zwei Möglichkeiten: Sind die Mengen der Eingangsstellen und Ausgangsstellen aller dieser Transitionen paarweise disjunkt, dann heißen diese Transitionen *unabhängig (independent)* und können alle zugleich schalten. Ist dies nicht der Fall, so wählt das Petri–Netz nichtdeterministisch eine unabhängige Menge von Transitionen aus und schaltet dann in Bezug auf diese Transition.

Sei M eine Markierung und $U \subseteq T$ eine unabhängige Menge durch M aktivierter Transitionen, bezüglich welcher das Netz schaltet. Dann ergibt sich die neue Markierung M' durch folgende Formel, in der die zur betrachteten Stelle s gehörige markierte Transition $t \in U$ aufgrund der Unabhängigkeit eindeutig festliegt.

$$\begin{array}{lll} M'(s) = M(s) - 1 & \Leftrightarrow & s \in {}^\bullet t \text{ aber } s \notin t^\bullet \\ M'(s) = M(s) + 1 & \Leftrightarrow & s \in t^\bullet \text{ aber } s \notin {}^\bullet t \\ M'(s) = M(s) & \Leftrightarrow & \text{sonst} \end{array}$$

Anschaulich bedeutet das folgendes: Eine Transition ist genau dann aktiviert, wenn alle ihre Eingangsstellen markiert sind. Wenn eine Transition schaltet, dann verliert jede Stelle, die Eingangsstelle aber nicht Ausgangsstelle der Transition ist, eine Marke, und jede Stelle, die Ausgangsstelle aber nicht Eingangsstelle der Transition ist, erhält eine Marke.

Den *Schaltvorgang*, bei dem eine Transition T eine Markierung M in eine Folgemarkierung M' überführt, notiert man auch mit

$$M \xrightarrow{T} M'$$

Existieren Transitionen $T_1, T_2, \ldots T_n$ dergestalt, daß

$$M_0 \xrightarrow{T_1} M_1,\ M_1 \xrightarrow{T_2} M_2,\ \ldots\ , M_{n-1} \xrightarrow{T_n} M_n$$

gilt, so nennt man $\sigma = T_1 \bullet T_2 \bullet \ldots \bullet T_n$ eine (Transitionen-) *Schaltfolge*, die eine Markierung M_0 in eine Markierung M_n überführt, oder M_n ist von M_0 aus über eine Schaltfolge σ *erreichbar*.

272 Bemerkung MODELLIERUNG
PETRI–Netze erlauben die Modellierung von *nebenläufigen und parallelen Prozessen*. Im Netz aus Abb. **??** wandert die Marke nach rechts bis zur Transition “fork”. Dort entstehen zwei Marken, die mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten im oberen und unteren Ast des Netzes parallel weiterwandern können und nebenläufige respektive parallele Prozesse darstellen. Anschließend synchronisieren sich diese beiden Prozesse bei der Transition “join”: Beide Eingangsstellen von “join” müssen Marken tragen, also beide parallelen Prozesse müssen ihre Arbeit beendet haben, bevor Marken in die Stelle rechts von “join” fließen können.

In Abb. **??** ist ein *Konflikt*, also ein nichtdeterministisches Verhalten modelliert: Zuerst schaltet die am weitesten links dargestellte Transition und die Marke fließt in die Stelle “Konflikt”. Nun darf entweder die obere oder die untere Ausgangstransition dieser Stelle schalten. Welche Stelle tatsächlich schaltet, wird durch die nichtdeterministische Auswahl des Netzes bedingt.

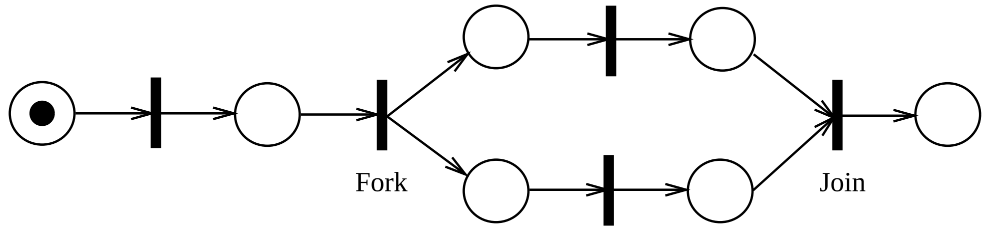

Abb. 14 Parallele Prozesse in einem Petri–Netz.

Ein sehr interessantes Phänomen ist die *Konfusion (confusion)*. Dies sind Situationen, in denen die Reihenfolge, in welcher gleichzeitig aktivierte Transitionen schalten, einen Einfluß darauf haben, ob später Konflikte auftreten oder nicht. Ein Beispiel für Konfusion finden sie in Abb. **??**: T_1 und T_2 sind markiert und könnten sogar gleichzeitige schalten. Wenn jedoch zuerst T_2 schaltet, dann entsteht unmittelbar danach ein Konflikt zwischen den Transitionen T_1 und T_3. Schaltet jedoch T_1 zuerst, dann ist dem Netz zumindest für den nächsten Schritt ein Konflikt erspart geblieben und es können beide aktivierte Transitionen schalten.

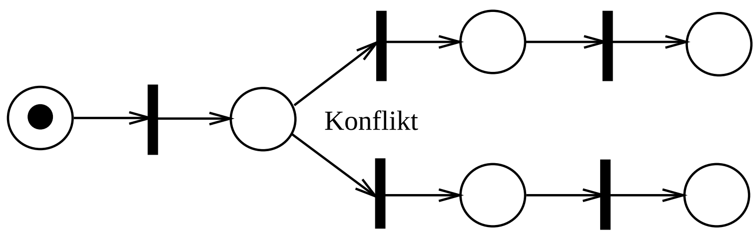

Abb. 15 Konflikt und Nichtdeterminismus in einem Petri–Netz.

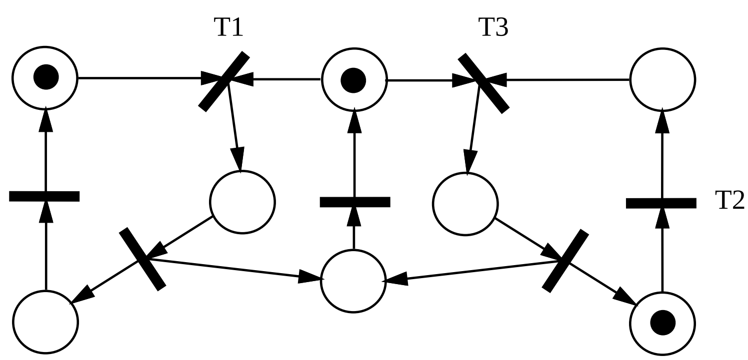

Abb. 16 Konfusion in einem Petri–Netz.