4 Relationen

Relationen stellen Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge dar.

4.1 Elementare Definitionen

83 Definition RELATION
Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen. Eine *n-stellige Relation (relation of arity n)* auf $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ des kartesischen Produkts. Für $n = 1, 2, 3$ nennt man die Relation auch *unär, binär* respektive *ternär*.

Eine *binäre Relation auf einer Menge (binary relation on S)* S ist eine Teilmenge $R \subseteq S \times S$ des kartesischen Produkts der Menge mit sich selbst. Für $(a, b) \in R$ schreibt man bei binären Relationen auch aRb. a heißt dann *Vorgänger von* b und b heißt *Nachfolger von* a.

Sind A und B zwei Mengen und ist R eine Relation, so ist R gemäß Definition nur eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$. In diesem Sinne wären $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ und $S = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{R}$ als Relationen identisch, da sie ja als Mengen identisch sind. Dies obwohl sie sich als Relationen eigentlich auf unterschiedliche Mengen beziehen. Möchte man diese Mengen, auf welche sich die Relationen beziehen, als Bestandteil der Relationsdefinition ansehen, so muß man obige Definition abändern. Erst dann lassen sich die Relationen R und S unterscheiden. Am Beispiel der binären Relation ergibt sich dann die folgende Definition:

Eine *binäre Relation* ist ein *Tripel* (A, B, R) aus einer Menge A, einer Menge B und einer Teilmenge $R \subseteq A \times B$ des kartesischen Produkts $A \times B$.

Diese Bemerkung mag man bis jetzt noch als übertriebenes Detail ansehen. Wenn wir uns aber den Eigenschaften von Relationen zuwenden werden, so wird sich herausstellen, daß im oberen Beispiel R eine reflexive, linkstotale und rechtstotale Relation ist, während S keine dieser drei Eigenschaften besitzt. Es ist daher sehr wohl gerechtfertigt, genauer über eine naive Definition nachzudenken, aufgrund welcher

R und S identisch wären.

84 Beispiel Darstellung von Relationen
Relationen sind Mengen und können deshalb auch wie diese aufzählend oder beschreibend angegeben werden:

(1) Aufzählend: $R \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ mit $R = \{(1,3),(3,1)\}$.

(2) Deskriptiv: $R \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ mit $(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow \exists n \in \mathrm{N} : b = n * a$, respektive $R = \{(a,b) \in \mathrm{N}^2 \mid \exists n \in \mathrm{N} : b = n * a\}$. Dies ist die sogenannte *Teilerrelation*.

4.2 Binäre Relationen

85 Definition Weitere Eigenschaften
Sei $R \subseteq X \times X$ eine binäre Relation auf der Menge X. R heißt

(1) *reflexiv (reflexive)*, wenn jedes Element x zu sich selbst in Relation steht: $\forall x \in X : (x,x) \in R$.

(2) *irreflexiv (irreflexive)*, wenn kein Element x zu sich selber in Relation steht: $\forall x \in X : (x,x) \notin R$.

(3) *symmetrisch (symmetric)*, wenn zu jedem Paar (x,y), das in der Relation ist, auch das gespiegelte Paar (y,x) in der Relation ist: $\forall x,y \in X : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$.

(4) *antisymmetrisch (identitiv, identitive, antisymmetric)*, wenn folgende Aussage gilt: Falls ein Paar (x,y) und auch das *gespiegelte Paar* (y,x) in Relation ist, dann kann das nur ein "reflexives Paar" gewesen sein: $\forall x,y \in X : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$.

(5) *asymmetrisch (asymmetric)*, wenn folgende Aussage gilt: Ist ein Paar in der Relation, dann ist das gespiegelte Paar (y,x) nicht in der Relation: $\forall x,y \in X : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$.

(6) *nicht symmetrisch (not symmetric)*, wenn die Relation nicht symmetrisch ist – wenn es also ein Paar (x,y) in der Relation gibt, dessen gespiegeltes Paar nicht in der Relation ist.

(7) *transitiv (transitive)*, wenn $\forall x,y,z \in X : (x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.

(8) *azyklisch (acyclic)*, wenn $\forall n \in \mathrm{N} : \neg\exists p_1, p_2, \ldots, p_n \in P : (p_1,p_2),(p_2,p_3),\ldots,(p_{n-1},p_n),(p_n,p_1) \in R$.

86 Beispiel EIGENSCHAFTEN VON RELATIONEN
Veranschaulichen Sie sich die Eigenschaften von Relationen und beweisen Sie die behaupteten Aussagen:

(1) Eine binäre Relation auf einer Menge X ist genau dann reflexiv, wenn sie die Diagonale von X enthält: $R \supseteq \Delta_X$. Sie ist genau dann irreflexiv, wenn sie zur Diagonale von X disjunkt ist: $R \cap \Delta_X = \emptyset$.

(2) Jede azyklische Relation ist irreflexiv.

(3) Es gibt Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind: Irreflexiv ist also nicht das Gegenteil von reflexiv. Es gibt genau eine Relation, die reflexiv und irreflexiv ist: Bis auf diesen Spezialfall schließen sich irreflexiv und reflexiv aber gegenseitig aus. Beachten Sie allgemein, daß Eigenschaften, die nicht miteinander koexistieren können, sich also gegenseitig ausschließen, nicht unbedingt das Gegenteil voneinander sein müssen.

(4) Geben Sie auf der Menge $\{1, 2, 3\}$ jeweils eine symmetrische, antisymmetrische, asymmetrische und nicht symmetrische Relation an.

(5) Zeigen Sie, daß die Gleichheitsrelation $=_M$ auf einer Menge M sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.

(6) Geben Sie auf der Menge $\{1, 2, 3\}$ eine Relation an, die sowohl symmetrisch als auch asymmetrisch ist, eine Relation die sowohl antisymmetrisch als auch asymmetrisch ist und eine Relation, die irreflexiv und antisymmetrisch ist.

(7) Muß eine Relation, die asymmetrisch ist, auch irreflexiv sein?

(8) Die Kleiner-gleich Relation $\leq$ auf N ist antisymmetrisch und die Kleiner Relation $<$ ist asymmetrisch.

87 Definition TOTALITÄTS- UND EINDEUTIGKEITSEIGENSCHAFTEN
Sei $\Gamma \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Γ heißt

linkstotal (left total), wenn die linke Menge total in der Relation auftaucht, also jedes Element $a \in A$ der linken Menge in (mindestens) einem Paar $(a, b) \in \Gamma$ der Relation links auftritt: $\forall a \in A : \exists b \in B : (a, b) \in \Gamma$.

rechtstotal (right total), wenn die rechte Menge total in der Relation auftaucht, also jedes Element $b \in B$ der rechten Menge in (mindestens) einem Paar $(a, b) \in \Gamma$ der Relation rechts auftritt: $\forall b \in B : \exists a \in A : (a, b) \in \Gamma$.

linkseindeutig (left unique), wenn das linke Element in der Relation jeweils eindeutig ist, also für ein $b \in B$, zu dem es ein $a \in A$ gibt mit $(a, b) \in \Gamma$, dieses linke a

eindeutig ist: $(a_1, b), (a_2, b) \in \Gamma \Rightarrow a_1 = a_2$. Es wird hier nicht verlangt, daß es zu einem $b \in B$ ein solches a gibt, aber *wenn* es eines gibt, dann ist es eindeutig bestimmt.

rechtseindeutig (right unique), wenn das rechte Element in der Relation jeweils eindeutig ist, also für ein $a \in A$, zu dem es ein $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in \Gamma$, dieses rechte b eindeutig ist: $(a, b_1), (a, b_2) \in \Gamma \Rightarrow b_1 = b_2$. Auch die Rechtseindeutigkeit beinhaltet nur eine Eindeutigkeitsaussage und keine Existenzaussage.

88 Beispiel TOTALITÄTS- UND EINDEUTIGKEITSEIGENSCHAFTEN
Geben Sie auf der Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen je eine Relation an, die linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig, linkseindeutig aber nicht rechtstotal, rechtseindeutig aber nicht linkstotal ist.

89 Beispiel GLEICHUNGEN UND RELATIONEN

(1) Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ die Relation, die sich aus der Gleichung $x * y = 1$ ergibt. Genauer: $x \Gamma y$ genau dann, wenn $x * y = 1$. Untersuchen Sie diese Relation auf alle bisher definierten Eigenschaften.

(2) Sei nun $\Delta \subseteq \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+$ durch dieselbe Gleichung wie oben definiert. Welche Eigenschaften wurden durch diese Veränderung der Grundmenge beeinflußt?

(3) Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ die Relation, die sich aus der Gleichung $x * y = 0$ ergibt. Genauer: $x \Gamma y$ genau dann, wenn $x * y = 0$. Untersuchen Sie wiederum alle bisher definierten Eigenschaften.

90 Beispiel EIN-AUSGABE RELATION VON PROGRAMMEN
Bei Programmen stellt man die Zusammenhänge zwischen Eingaben und Ausgaben gerne durch eine Relation dar:

(1) Betrachten Sie das folgende Programm:

```
INTEGER A
READ (A)
WHILE (A <> 0) DO A:= A - 2 OD
WRITE (A)
```

Nehmen Sie an, daß der Datentyp INTEGER beliebig große ganze Zahlen umfaßt. Die *Ein-Ausgabe Relation (I/O relation)* dieses Programms ist die Relation $\Gamma \subseteq \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$, bei der $(X, Y) \in \Gamma$ genau dann gilt, wenn das Programm auf die Eingabe von X mit der Ausgabe von Y reagiert. Geben Sie diese Relation an und untersuchen Sie sie auf alle bisher definierten Eigenschaften.

(2) Modifizieren Sie die Schleife im Programm so, daß die Ein-Ausgabe Relation linkstotal wird. Modifizieren Sie die Schleife im obigen Programm so, daß die Ein-Ausgabe Relation nicht linkseindeutig wird.

(3) Kann die Ein-Ausgabe Relation eines Programms eine nicht rechtseindeutige Relation sein? Warum?

(4) Schreiben Sie ein Programm, dessen Ein-Ausgabe Relation reflexiv ist. Welche Funktion wird von diesem Programm berechnet? Schreiben Sie ein Programm, dessen Ein-Ausgabe Relation die leere Menge ist. Was bedeutet das für das Verhalten des Programms?

(5) Welche anschauliche Bedeutung haben die Eigenschaften der Linkstotalität, Rechtstotalität, Linkseindeutigkeit und der Rechtseindeutigkeit der Ein-Ausgabe Relation für ein Programm?

91 Beispiel ELEMENTRELATION
Die in der Mengenlehre eingeführte Elementrelation $\in$ kann auch als Relation im Sinne unserer Definition betrachtet werden: Ist A eine Menge und T eine Teilmenge, also $T \subseteq A$ oder $T \in \mathcal{P}(A)$. Dann gibt $a \in T$ an, ob a Element von T ist. Wir können nun die Relation $\in_A \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$ betrachten, die durch $\in_A := \{(a,T) \mid a \in T\}$ definiert ist.

92 Definition DUALE RELATION
Sei $\Delta \subseteq X \times Y$ eine binäre Relation. Die *duale (konverse, transponierte, dual, converse, transposed) Relation* zur Relation Δ ist die Relation $\Delta^* \subseteq Y \times X$, definiert durch $\Delta^* := \{(y,x) \mid (x,y) \in \Delta\}$. Das *Transponieren* einer Relation ist der Übergang zu ihrer dualen und bedeutet das Vertauschen der Reihenfolge der Paare und der Mengen. Statt Δ^* schreibt man auch Δ^t oder Δ^{-1}.

93 Beispiel WICHTIGE RELATIONEN
Sei Γ die *Gleichheitsrelation* auf der Menge $\{1,2,3,4\}$, $\Delta \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ die *Teilerrelation*, also $(x,y) \in \Delta$ genau dann, wenn x ein Teiler von y ist, ferner sei $< \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ die *Kleiner Relation* $x < y$ und $\leq \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ die *Kleiner-gleich Relation* $x \leq y$. Untersuchen Sie diese Relationen auf alle bisher definierten Eigenschaften und geben Sie die dualen Relationen zu ihnen an.

94 Definition KOMPOSITION
Seien $\Gamma_1 \subseteq X \times Y$ und $\Gamma_2 \subseteq Y \times Z$ zwei binäre Relationen. Die *Komposition (composition)* dieser Relationen ist die Relation $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \subseteq X \times Z$, definiert durch

$$(x,z) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \Leftrightarrow \exists y \in Y : (x,y) \in \Gamma_1 \wedge (y,z) \in \Gamma_2$$

95 Beispiel HINTEREINANDERAUSFÜHRUNG VON PROGRAMMEN
Seien P_1 und P_2 zwei Programme, die beide eine ganze Zahl einlesen und eine ganze Zahl ausgeben. Wir wollen nun die *Hintereinanderausführung (sequential composition)* $P_1; P_2$ dieser beiden Programme betrachten: Es wird ein Wert eingegeben, P_1 ausgeführt, und der Ausgabewert von P_1 dient als Eingabewert von P_2.

(1) Zeigen Sie, daß die Ein-Ausgabe Relation der Hintereinanderausführung $P_1; P_2$ gleich der Komposition der Ein-Ausgabe Relationen der einzelnen Programme ist. In welcher Reihenfolge ist die Komposition zu bilden?

(2) Berechnen Sie die Ein-Ausgabe Relationen für das Programm P_1:

```
INTEGER A
READ (A)
WHILE (A <> 0) DO A:= A - 2 OD
WRITE (A)
```

und das Programm P_2:

```
INTEGER A
READ (A)
WHILE (A <> 0) DO A:= A + 3 OD
WRITE (A)
```

sowie für die Hintereinanderausführungen $P_1; P_2$ und $P_2; P_1$ sowie $P_1; P_1$.

(3) Geben Sie zum nachfolgenden Programm P:

```
INTEGER A
READ (A)
A := 2*A
WRITE (A)
```

ein Programm Q an, so daß die Ein-Ausgabe Relation des Programms $P; P; Q$ die Diagonale in Z ist.

4.3 Funktionen

96 Definition FUNKTIONEN
Eine *Funktion (function)* ist eine binäre Relation $f \subseteq A \times B$ die *funktional* ist, das heißt sie ist *linkstotal* und *rechtseindeutig*. Das heißt: Zu jedem $a \in A$ gibt[1] es

[1] aufgrund der Linkstotalität

genau[2] ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$. Für dieses b wollen wir $f(a)$ schreiben. Man nennt a das *Argument (argument)* der Funktion und $b = f(a)$ seinen *Wert*. Bei Funktionen schreibt man $f : A \to B$ anstatt $f \subseteq A \times B$ und $f(a) = b$ anstatt $(a, b) \in f$.

Ist $f : A \to B$ eine Funktion, so nennt man die Menge A die *Quelle (source)* und die Menge B das *Ziel (target)* dieser Funktion. Neben Quelle ist auch *Definitionsbereich (domain)* und neben Ziel auch *Wertebereich (range)* sehr gebräuchlich. Da Bezeichnung "Definitionsbereich" bei den sogenannten partiellen Funktionen eine unterschiedliche Bedeutung hat und das Wort "Wertebereich" oft zu Verwechslungen zwischen Wertebereich und Bildmenge, das ist die Menge aller Werte der Funktion, Anlaß gibt, wird von dieser Terminologie aber eher abgeraten. Ähnlich wie bei Relationen wollen wir auch bei Funktionen Quelle und Ziel als fundamentalen Bestandteil der Funktion ansehen. Eine Funktion ist also eigentlich ein Tripel der Gestalt (A, B, f).

Die Menge $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ heißt das *Bild (image) von f*. Für $f(A)$ schreibt man auch $Im(A)$ oder $Bild(A)$. Statt Bild sagt man auch *Wertemenge*. Ist $C \subseteq A$ eine Teilmenge der Quelle, dann heißt die Menge $f(C) := \{f(a) \mid a \in C\}$ das *Bild (image) der Menge C unter der Funktion f*. Ist $D \subseteq B$ eine Teilmenge des Ziels, dann heißt die Menge $f^{-1}(D) := \{a \in A \mid f(a) \in D\}$ das *Urbild (inverse image) der Menge D unter der Funktion f*. Das Urbild des Ziels ist übrigens die Quelle.

97 Definition KOMPOSITION VON FUNKTIONEN
Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so bezeichnet $g \circ f : A \to C$ die *Komposition (composition)* der Funktionen f und g, die durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ definiert ist. Hier liegt $a \in A$, $f(a) \in B$ und $(g \circ f)(a) \in C$. Lies $g \circ f$ als *f dann g (g nach f, g komponiert f, f then g, g composed f)*.

Bis auf die unterschiedliche Reihenfolge stimmen die Komposition von Relationen und jene von Funktionen überein: interpretierten wir die Funktion f als Relation $f \subseteq A \times B$ und die Funktion g als Relation $g \subseteq B \times C$, dann wäre $f \circ g \subseteq A \times C$ die Komposition von f und g als Relationen. Sind f und g funktionale Relationen, dann ist die Relation $f \circ g$ ebenfalls eine funktionale Relation, welche mit der Funktion $g \circ f$ zusammenfällt.

98 Beispiel KOMPOSITION VON FUNKTIONEN
Sei $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ die Funktion $f(x) = 3 + 2x$ und $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ die Funktion $g(x) = x^2$, dann ist $g \circ f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ die Funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3 + 2x) = (3 + 2x)^2$. In diesem Beispiel können wir auch $f \circ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ausrechnen. Das ist $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3 + 2x^2$.

[2] aufgrund der Rechtseindeutigkeit

Nun sei $f : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$ die Funktion $f(x) = \ln(x)$ und $g : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$ die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$. Dann ist $f \circ g : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$ die Funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(\sqrt{x})$. Die Funktion $g \circ f$ kann aber nicht gebildet werden.

99 Definition SURJEKTIV, INJEKTIV, BIJEKTIV
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

(1) *surjektiv*, wenn das Ziel gleich dem Bild ist, das heißt wenn jedes Element b der Zielmenge B auch tatsächlich als Funktionswert der Form $f(a)$ auftaucht. Oder anders ausgedrückt, wenn f als Relation rechtstotal ist: $\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a)$, oder auch $f(A) = B$.

(2) *injektiv*, wenn jedes Element b der Zielmenge B, das tatsächlich als Funktionswert der Form $f(a_1)$ auftaucht, nur als Funktionswert genau eines solchen a_1 auftaucht. Es gibt dann kein von a_1 verschiedenes a_2, das auf denselben Funktionswert $f(a_1) = f(a_2)$ führt. Oder anders ausgedrückt, wenn f als Relation linkseindeutig ist: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

(3) *bijektiv*, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

100 Beispiel QUADRATFUNKTION
Die Funktion $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ mit $x \mapsto x^2$, also $f(x) = x^2$ heißt Quadratfunktion.

(1) Geben Sie Quelle, Ziel und Bild von f an.

(2) Kann man f auch so schreiben, daß das Bild gleich dem Ziel ist? Wie? Kann man f als Funktion auch so schreiben, daß die Quelle R und das Ziel N ist?

(3) Geben Sie das Bild der Menge N und die Urbilder der Mengen N und Z^- unter der Funktion f an.

(4) Zeigen Sie die Eigenschaften der nachfolgenden Tabelle:

Funktion		**Surjektiv**	**Injektiv**	**Bijektiv**
$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$	$f : x \mapsto x^2$	nein	nein	nein
$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_0^+$	$f : x \mapsto x^2$	ja	nein	nein
$f : \mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}$	$f : x \mapsto x^2$	nein	ja	nein
$f : \mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}_0^+$	$f : x \mapsto x^2$	ja	ja	ja

101 Definition IDENTITÄT UND KONSTANTE FUNKTION
Die Funktion $id_A : A \to A$ auf einer Menge A, die durch $id_A(a) = a$ definiert ist, heißt die *Identität(sfunktion) (identity)* der Menge A. Eine Funktion $c : A \to B$, die für alle Werte des Argumentes denselben Wert hat, heißt *konstant (constant)*.

102 Definition Umkehrfunktion

Eine Funktion $g : B \to A$ heißt eine *Umkehrfunktion (inverse function)* einer Funktion $f : A \to B$, wenn

(1) $g \circ f : A \to A$ gleich der Identität id_A auf A ist: $\forall a \in A : g(f(a)) = a$, und

(2) $f \circ g : B \to B$ gleich der Identität id_B auf B ist: $\forall b \in B : f(g(b)) = b$.

Zu einer Funktion $f : A \to B$ gibt es genau dann eine Umkehrfunktion, wenn f bijektiv ist. Diese Umkehrfunktion ist eindeutig, es gibt also genau ein g mit dieser Eigenschaft. Wir können somit nicht nur von *einer* Umkehrfunktion sondern von *der* Umkehrfunktion reden. Man schreibt f^{-1} für diese Umkehrfunktion.

Für Funktionen $f : A \to B$, die nicht bijektiv sind und somit keine Umkehrfunktion besitzen, wird die Notation f^{-1} zur Angabe des Urbilds benutzt.

103 Beispiel Umkehrfunktion der Quadratfunktion

Wir haben gesehen, daß die Funktion $f : \mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ bijektiv ist. Ihre Umkehrfunktion ist die Funktion $g : \mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}_0^+$ mit $g(x) = \sqrt{x}$. Man sieht, daß für $x \in \mathrm{R}_0^+$ dann $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ gilt und für $z \in \mathrm{R}_0^+$ auch $f(g(z)) = (\sqrt{z})^2 = z$ ist.

In den anderen, im obigen Beispiel angesprochenen Fällen, ist die Quadratfunktion nicht bijektiv und hat somit keine Umkehrfunktion. Überlegen Sie sich für jeden dieser Fälle, was denn beim Versuch, eine Umkehrfunktion zu bestimmen, jeweils schief geht. Da es in keinem der Fälle eine Umkehrfunktion gibt, muß zumindest jeweils ein Problem auftauchen.

104 Bemerkung Pfeildiagramme

Binäre Relationen $f \subseteq A \times B$ können als *Pfeildiagramme* dargestellt werden, vor allem wenn die beteiligten Mengen endlich sind: Man zeichnet die linke Menge A links, die rechte Menge B rechts und zieht für jedes Paar $(a, b) \in f$ einen gerichteten Pfeil vom Element a zum Element b.

Viele Eigenschaften der Relation f lassen sich nun geometrisch deuten: f ist linkstotal (linkseindeutig), wenn von allen Elementen der linken Menge mindestens (höchstens) ein Pfeil ausgeht. f ist rechtstotal (rechtseindeutig), wenn jedes Element der rechten Menge von mindestens (höchstens) einem Pfeil getroffen wird. Falls f funktional ist, so kann man weiters folgendes festhalten: Ist f surjektiv, so wird jedes Element des Ziels von mindestens einem Pfeil getroffen, ist f injektiv, so wird jedes Element des Ziels von höchstens einem Pfeil getroffen. Ist f bijektiv, so wird jedes Element des Ziels von genau einem Pfeil getroffen.

105 Beispiel FUNKTIONEN NATÜRLICHER ZAHLEN
Geben Sie jeweils zwei Funktionen der Form $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ an, die weder injektiv noch surjektiv, injektiv aber nicht surjektiv, surjektiv aber nicht injektiv, injektiv und surjektiv (also bijektiv) sind. Lösen Sie dasselbe Problem nun mit der endlichen Menge $\{1, 2, 3\}$ als Quelle und Ziel sowie mit der Menge der natürlichen Zahlen als Quelle und der Menge der geraden Zahlen als Ziel.

106 Bemerkung FUNKTION MIT MEHREREN ARGUMENTEN UND WERTEN
Funktionen mit *mehreren Argumenten* sind Funktionen einer speziellen Gestalt, beispielsweise $f : A \times B \times C \to D$. Hier ist die Quelle die Menge $A \times B \times C$ und das Ziel die Menge D. $f : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ ist so eine Funktion. Ebenso gibt es Funktionen mit *mehreren Werten*, wie etwa $f : A \to B \times C$. Ihre Quelle ist die Menge A, ihr Ziel die Menge $B \times C$. Auch gemischte Varianten wie $f : A \times B \to C \times D$ oder gar $f : A \times B \to (C \times D) \cap (F \setminus A)$ sind möglich.

107 Definition LAMBDA NOTATION VON FUNKTIONEN
Die Schreibweise von Funktionen in der Form $f(x) = x^2$ hat den Nachteil, daß nicht streng zwischen dem Funktionswert $f(x) = x^2$ an der Stelle x und der Funktion f selber unterschieden werden kann. Zur konkreten Angabe einer Funktion muß ich dieser Funktion zuerst einen Namen geben (nämlich f). Um den Unterschied zwischen Funktionen und Funktionswerten und den Vorgang des Einsetzens von Werten in eine Funktion besser studieren zu können, hat ALONSO CHURCH den *Lambda–Kalkül* entwickelt. Wir können hier nur ganz an der Oberfläche bleiben, wollen aber festhalten, daß dieser Kalkül besondere Bedeutung für die Theorie der Berechenbarkeit, der Typensysteme und die Semantik von Programmiersprachen besitzt.

$\lambda x.x^2$ bezeichnet die Quadratfunktion.
$(\lambda x.x^2)(3)$ bezeichnet den Wert der Quadratfunktion an der Stelle 3, also 9.
$(\lambda x.x^2)(x)$ bezeichnet den Wert der Quadratfunktion an der Stelle x, also x^2.
$(\lambda x.x^2)(y)$ bezeichnet den Wert der Quadratfunktion an der Stelle y, also y^2.
$y = f(x)$ besagt, daß y den Wert der Funktion f an der Stelle x hat.
$f = \lambda x.x^2$ legt f als die Quadratfunktion (ohne Angabe von Quelle und Ziel) fest.

In unserem vereinfachten Lambda Kalkül gelten die folgenden Regeln:

$\lambda x.f(x) = \lambda y.f(y)$	Alpha (α) Konversion oder *Platzhaltertausch*
$(\lambda x.f(x))(a) = f(a)$	Beta (β) Konversion oder *Funktionsanwendung*
$f = \lambda x.f(x)$	Eta (η) Konversion oder *Funktionsdefinition*

108 Beispiel AUSWERTUNG VON LAMBDA AUSDRÜCKEN
Werten Sie unter schrittweiser Anwendung der angeführten Regeln die folgenden Lambda Ausdrücke aus:

(1) $(\lambda x.x^2)(5)$

(2) $(\lambda x.(\lambda y.x/y))(4)(2)$

(3) $((\lambda f.f \circ f)(\lambda x.(3 * x + 2)))(3)$

Eine Funktion, deren Argumente oder Werte nicht Zahlen sondern selber wieder Funktionen sind, nennt man eine *Funktion höherer Ordnung (higher order function)*. In (3) wird eine gewöhnliche lineare Funktion als Funktion erster Ordnung in eine solche Funktion zweiter Ordnung eingesetzt und es ergibt sich eine neue gewöhnliche Funktion erster Ordnung, die dann auf eine Zahl angewendet werden kann.

In (2) wird ersichtlich, daß man eine gewöhnliche Funktion von zwei Argmenten, $g(x, y) = x/y$ auch als eine Funktion zweiter Ordnung in nur einem Argument verstehen kann: Man betrachtet hierfür $g(x)(y) = x/y$ als eine Funktion zweiter Ordnung, die bei Angabe eines Argumentes 2 eine Funktion $g(x)(2) = x/2$ erster Ordnung ergibt. Diese Interpretation von Funktionen mehrerer Argumente nennt man nach Ihrem Entdecker HASKELL CURRY auch CURRY*sierung*.

Funktionen höherer Ordnung, die Technik der CURRYsierung und die Einteilung von Lambda–Ausdrücken in Funktionen unterschiedlicher Ordnung sind die Anfangsgründe der *funktionalen Programmierung*.

4.4 Ordnungsrelationen

109 Definition ORDNUNGSRELATION
Eine *Ordnungsrelation (Ordnung, order, order relation)* auf einer Menge R ist eine Relation $\leq$, also eine Teilmenge des kartesischen Produktes, $\leq \subseteq R \times R$, die *reflexiv*, *identitiv* und *transitiv* ist. In dieser Notation der Relation bedeutet das:

(1) *reflexiv*, also $\forall r \in R : r \leq r$.

(2) *identitiv*, also $\forall r, s \in R : [(r \leq s) \wedge (s \leq r)] \Rightarrow (r = s)$.

(3) *transitiv*, also $\forall r, s, t \in R : [(r \leq s) \wedge (s \leq t)] \Rightarrow (r \leq t)$.

Gilt $x \leq y$, so nennt man x das *kleinere* und y das *größere* Element.

Eine Ordnungsrelation $\leq$ heißt *linear (total, konnex; total, connex)*, wenn für je zwei Elemente $x, y \in R$ stets eines das größere und eines das kleinere ist – sofern die Elemente nicht ohnehin schon gleich sind: $\forall x, y \in R : (x \leq y) \vee (y \leq x)$. Ist eine Ordnungsrelation nicht linear, so gibt es Elemente x und y, die nicht miteinander *vergleichbar (comparable)* sind, es gilt also weder $x \leq y$ noch $y \leq x$.

110 Bemerkung ABWEICHENDE BEZEICHNUNGEN
In einigen Büchern werden Ordnungsrelationen teilweise unterschiedlich bezeichnet: Statt von Ordnungsrelationen spricht man dort von *partiellen Ordnungsrelationen* oder auch *Halbordnungen*, für totale Ordnungsrelationen steht dort oft nur *Ordnungsrelation*.

111 Beispiel ORDNUNGSRELATIONEN
Die *natürliche Ordnung* auf den reellen Zahlen, also $\leq \subseteq \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ mit $(x, y) \in \leq$, in gewohnter Schreibweise $x \leq y$, die besagt, daß x eine reelle Zahl kleiner oder gleich y ist, ist eine lineare Ordnungsrelation.

Die *Teilerrelation* $| \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ auf der Menge N der natürlichen Zahlen ist eine Ordnungsrelation. Es ist $a \mid b$ genau dann, wenn die Zahl a Teiler der Zahl b ist. Die Teilerrelation ist nicht linear.

Ist X eine Menge, dann ist die *Teilmengenrelation* $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf der Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X, also eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Diese Relation ist nicht linear.

Die *Gleichheitsrelation* $=_M$ auf einer Menge M ist eine Ordnungsrelation. Sie ist im allgemeinen keine lineare Ordnungsrelation und ein eher atypisches Beispiel für eine Ordnungsrelation.

112 Definition HASSE–DIAGRAMM
Eine Ordnungsrelation $\leq$ auf einer endlichen Menge M kann man durch ein sogenanntes HASSE–*Diagramm* veranschaulichen: Die endlich vielen Elemente der Menge werden als Punkte dargestellt. Je kleiner ein Element der Ordnung nach ist, umso höher wird es im Diagramm gezeichnet. Ist ein Element x kleiner als ein Element y, also $x \leq y$, und gibt es kein weiteres Element z, das zwischen x und y liegt ($x \leq z \leq y$), dann wird von dem weiter oben liegenden Element x eine Kante auf das weiter unten liegende Element y gezeichnet. Miteinander nicht vergleichbare Elemente können auf derselben oder auf unterschiedlichen Höhen gezeichnet werden. Ein Element a ist somit genau dann größer als ein Element b, wenn es einen gänzlich in vertikaler Richtung verlaufenden Weg von a nach b gibt und a tiefer gezeichnet wurde als b.

113 Definition SPEZIELLE ELEMENTE EINER ORDNUNG
Sei $\leq \subseteq D \times D$ eine Ordnungsrelation. Ein Element $s \in D$ heißt

ein kleinstes (smallest) Element, wenn es kleiner oder gleich allen anderen Elementen ist: $\forall d \in D : s \leq d$. Insbesondere muß ein kleinstes Element also mit allen anderen Elementen vergleichbar sein.

ein größtes (largest) Element, wenn es größer oder gleich allen anderen Elementen ist: $\forall d \in D : d \leq s$. Insbesondere muß ein größtes Element also mit allen anderen Elementen vergleichbar sein.

ein minimales (minimal) Element, wenn es kleiner oder gleich allen vergleichbaren Elementen ist: $\forall d \in D : [(d \leq s) \vee (s \leq d)] \Rightarrow (s \leq d)$. Äquivalent ist: $\forall d \in D : d \leq s \Rightarrow d = s$. Ist also ein Element kleiner oder gleich einem minimalen Element, dann muß es gleich diesem minimalen Element sein.

ein maximales (maximal) Element, wenn es größer oder gleich allen vergleichbaren Elementen ist: $\forall d \in D : [(s \leq d) \vee (d \leq s)] \Rightarrow (d \leq s)$. Äquivalent ist: $\forall d \in D : s \leq d \Rightarrow s = d$. Ist also ein Element größer oder gleich einem maximalen Element, dann muß es gleich diesem maximalen Element sein.

114 Bemerkung SPEZIELLE ELEMENTE EINER ORDNUNG

Wie uns das Beispiel der natürlichen Ordnung auf R zeigt, hat eine Ordnung nicht immer größte, kleinste, minimale oder maximale Elemente. Wenn es aber größte oder kleinste Elemente gibt, dann jedoch höchstens ein größtes und ein kleinstes: Diese Elemente sind also eindeutig und man kann von *dem* größten oder kleinsten Element sprechen. Ein Beispiel für ein kleinstes Element ist die 1 in der Menge N, sowohl unter natürlicher Ordnung als auch unter der Teilerrelation als Ordnung.

Minimale und maximale Elemente kann es mehrere gleichzeitig geben. Ein Beispiel ist die Menge $\mathrm{N} \setminus \{1\}$ unter der Teilerrelation als Ordnung, bei der jede Primzahl ein minimales Element ist. In einer linearen Ordnungsrelation kann es jedoch höchstens ein minimales und maximales Element geben.

Existiert das kleinste oder größte Element, so ist es auch ein minimales oder maximales Element. Die Umkehrung davon gilt aber nicht.

115 Definition SPEZIELLE ELEMENTE ZU EINER TEILMENGE

Sei $\leq \subseteq D \times D$ eine Ordnungsrelation und $T \subseteq D$ eine Teilmenge. Ein Element $s \in D$ heißt

eine untere Schranke (lower bound) der Teilmenge T, wenn alle Elemente von T größer sind: $\forall t \in T : s \leq t$, und *eine obere Schranke (upper bound) der Teilmenge T*, wenn alle Elemente von T kleiner sind: $\forall t \in T : t \leq s$.

ein Infimum der Teilmenge T, wenn es eine untere Schranke ist, es aber keine größere untere Schranke gibt, und *ein Supremum der Teilmenge T*, wenn es eine obere Schranke ist, es aber keine kleinere obere Schranke gibt.

116 Definition STRIKTE UND NICHT STRIKTE ORDNUNGSRELATIONEN
Bei der natürlichen Ordnungsrelation auf Zahlenmengen gibt es eigentlich zwei Varianten, die *Kleiner-gleich Relation* $\leq$ und die *Kleiner Relation* $<$. Auch bei beliebigen Ordnungen gibt es zwei unterschiedliche Varianten:

Eine Relation $\leq \subseteq M \times M$ auf einer Menge heißt eine *nicht strikte (non strict) Ordnungsrelation*, wenn sie reflexiv, identitiv und transitiv ist und eine *strikte (strict) Ordnungsrelation*, wenn sie irreflexiv, asymmetrisch und transitiv ist. Das, was wir bisher als Ordnungsrelation bezeichnet haben, ist im Sinne dieser genaueren Terminologie eine nicht strikte Ordnungsrelation.

117 Satz ZUSAMMENHANG STRIKTER UND NICHT STRIKTER ORDNUNGEN
Ist eine Relation $\leq \subseteq M \times M$ eine nicht strikte Ordnungsrelation, dann ist die Relation $< \subseteq M \times M$, definiert durch $< := \leq \setminus \Delta_M$, also $x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \wedge x \neq y$, eine strikte Ordnungsrelation.

Ist eine Relation $< \subseteq M \times M$ eine strikte Ordnungsrelation, dann ist die Relation $\leq \subseteq M \times M$, definiert durch $\leq := < \cup \Delta_M$, also $x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$, eine nicht strikte Ordnungsrelation.

118 Bemerkung DUALITÄT
Man kann leicht zeigen, daß die duale Relation zu einer Ordnungsrelation wieder eine Ordnungsrelation ist. Dies gilt sowohl für strikte als auch für nicht strikte Ordnungen. Bei der natürlichen Ordnung auf Zahlenmengen etwa ist neben $\leq$ auch die duale Relation $\geq$ eine Ordnung. Das Prinzip der Dualität, wir haben es bei logischen und mengentheoretischen Gesetzen bereits kennengelernt, hat in ähnlicher Form auch bei Ordnungsstrukturen eine gewisse Bedeutung.

Schreiben wir die Ordnungsrelation jedoch in der Form $R \subseteq M \times M$, so gibt es keinen Hinweis darauf ob im Falle aRb das Element a nun das größere oder das kleinere ist. Ähnlich relativiert sich die Terminologie bei minimalen und maximalen sowie bei kleinsten und größten Elementen. Nur bei der natürlichen Ordnung haben wir eine Konvention, daß bei der Ordnungsrelation $\leq$ das links stehende Element und bei der Ordnungsrelation $\geq$ das rechts stehende Element das "kleinere" Element sein soll. Die natürliche Ordnungsrelation trägt also neben einer Ordnungsinformation noch eine Art Orientierungsinformation, die einer beliebigen Ordnungsrelation jedoch fehlt.

Möchte man auf die implizite Angabe der Orientierung verzichten, so kann man von linken und rechten Elementen statt von kleineren und größeren, von links-dominanten oder rechts-dominanten Elementen statt von kleinsten und größten und von links-extremalen oder rechts-extremalen Elementen anstatt von minimalen oder maximalen sprechen. Ein Element $x \in M$ heißt etwa links-dominant unter einer Ordnung $R \subseteq M \times M$, wenn $\forall y \in M : xRy$ gilt. Die anderen Definitionen kann man analog bilden.

119 Beispiel RELATIONEN ZWISCHEN PROGRAMMEN
Sei X die Menge aller syntaktisch korrekten Pascal Programme, welche n Eingabewerte lesen und anschließend entweder in eine Endlosschleife gehen oder einen Wert ausgeben. Betrachten Sie die folgende Relation: $\sqsubseteq \subseteq X \times X$ mit $P \sqsubseteq Q$ und $P, Q \in X$ genau dann, wenn das Programm Q für alle Eingabewerte terminiert, für die das Programm P terminiert, und in diesem Fall auch dasselbe Ergebnis ausgibt wie P. Q ist eine Art Erweiterung des Programms P, es berechnet "mehr" Werte als P und stimmt, wo immer P einen Wert liefert, mit ihm überein. Diese Relation spielt eine wichtige Rolle in der Semantik der Programmiersprachen. Ist sie eine Ordnungsrelation?

4.5 Operationen auf Relationen

120 Definition PROJEKTIONEN VON KARTESISCHEN PRODUKTEN
Für Mengen M_1, M_2, ..., M_n und $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt die Abbildung

$$p_i : M_1 \times M_2 \times \cdots M_n \to M_i$$

$$p_i(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m_i$$

die *i–te Projektion* des kartesischen Produkts $M_1 \times M_2 \times \cdots M_n$.

Ist $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ eine nichtleere Menge von Indizes, dann kann man die *Projektion auf die Indexmenge I* betrachten, das ist die Abbildung

$$p_I : M_1 \times M_2 \times \cdots M_n \to \times_{i \in I} M_i$$

$$p_I : (m_1, m_2, \ldots, m_n) = (m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k})$$

Hierbei ist $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ und $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ und

$$\times_{i \in I} M_i = M_{i_1} \times M_{i_2} \times \ldots \times M_{i_k}$$

das nach aufsteigenden Indizes gebildete Produkt der Mengen M_i.

121 Beispiel PROJEKTIONEN
Sei $M_1 = \{a,b,c\}$, $M_2 = \{1,2,3\}$ und $M_3 = \{*,+\}$. Die Projektion p_2 der Menge $M_1 \times M_2 \times M_3$ ist die Abbildung $p_2 : M_1 \times M_2 \times M_3 \to M_2$. Es ist dann etwa $p_2(a,2,+) = 2$, $p_2(a,1,*) = 1$ und $p_2(c,3,*) = 3$.

Die Projektion $p_{\{1,3\}}$ ist die Abbildung $p_{\{1,3\}} : M_1 \times M_2 \times M_3 \to M_1 \times M_3$. Es ist dann beispielsweise $p_{\{1,3\}}(a,2,+) = (a,+)$, $p_{\{1,3\}}(a,1,*) = (a,*)$ und $p_{\{1,3\}}(c,3,*) = (c,*)$.

122 Beispiel EIGENSCHAFTEN VON PROJEKTIONEN
Zeigen Sie, daß Projektionen surjektiv sind und untersuchen Sie, unter welchen speziellen Voraussetzungen Projektionen injektiv sind.

123 Definition PROJEKTIONEN VON RELATIONEN
Sei nun $\Gamma \subseteq M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ eine Relation und $I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ eine Indexmenge. Dann ist die Menge $p_I(\Gamma)$, also das Bild der Menge Γ unter der Abbildung p_I wieder eine Relation, und zwar ist $p_I(\Gamma) \subseteq \times_{i\in I} M_i$.

124 Beispiel PROJEKTIONEN VON RELATIONEN
Gegeben sei

$$\begin{aligned}
M_1 = &\ \{\text{ Franz, Fritz, Gerhard, Markus}\}\\
M_2 = &\ \{\text{ Sekretär, Kellner, Arbeitsloser}\}\\
M_3 = &\ \{\text{ ledig, verheiratet}\}\\
\Gamma = &\ \{(\text{ Franz, Sekretär, verheiratet}), (\text{ Fritz, Sekretär, ledig}),\\
&\quad (\text{ Gerhard, Kellner, ledig}), (\text{ Markus, Arbeitsloser, verheiratet})\}
\end{aligned}$$

Die Interpretation von Γ als Teil einer relationalen Datenbank ist unmittelbar klar.

Mit Projektion auf $I = \{2,3\}$ erhalten wir die Relation

$$\begin{aligned}
p_{\{2,3\}}(\Gamma) = &\ \{(\text{ Sekretär, verheiratet}), (\text{ Sekretär, ledig}),\\
&\quad (\text{ Kellner, ledig}), (\text{ Arbeitsloser, verheiratet})\}
\end{aligned}$$

Die Relation Γ ist funktional, da es zu jeder Person genau ein Attributpaar ("Beruf", "Stand") gibt. Γ kann also als Funktion $\Gamma : M_1 \to M_2 \times M_3$ interpretiert werden. Nach der Projektion ist die Relation $p_{\{2,3\}}(\Gamma)$ nicht mehr funktional, da es einen Beruf gibt (nämlich Sekretär), dem man zwei verschiedene Stände zuordnen müßte. Durch die Projektion wurde also Information verloren: Selbst wenn wir für jede Person den Stand wüßten, wäre daraus und aus der Projektion das ursprüngliche Γ nicht mehr herstellbar. Mit solchen und ähnlichen Fragen beschäftigt sich die

Theorie relationaler Datenbanken.

125 Beispiel DATENBANK ALS RELATION
Ein Spital beherbergt Patienten, von denen bei jeder Aufnahme Name, Patientennummer, Adresse, Geburtsdatum, Aufnahmedatum und Aufnahmediagnose erfaßt werden. Ein Patient sei durch seine Patientennummer eindeutig identifiziert.

In welcher Relation können diese Daten gespeichert werden? Geben Sie das zugehörige kartesische Produkt an. Für statistische Untersuchungen soll eine Aufnahmedatei erstellt werden. Da die Datei aus Datenschutzgründen vorher anonymisiert werden muß, werden Name und Adresse gestrichen. Formulieren Sie diese Anonymisierung als Projektion. Geben Sie die folgenden Mengen deskriptiv und/oder als Projektionen an: Die Menge aller Aufnahmediagnosen, die Menge aller Patienten, die zum Zeitpunkt ihrer Aufnahme älter als 50 Jahre waren sowie die Menge aller Patienten, die mehr als einmal aufgenommen wurden.

4.6 Äquivalenzrelationen

126 Definition ÄQUIVALENZRELATION
Eine *Äquivalenzrelation (equivalence relation)* auf einer Menge M ist eine binäre Relation $\Gamma \subseteq M \times M$ auf M, die *reflexiv, symmetrisch und transitiv* ist. Äquivalenzrelationen werden oft mit den Zeichen $\sim$, $\approx$, $\equiv$ oder $=$ notiert.

127 Beispiel GLEICHHEITSRELATION
Die Gleichheitsrelation $=_M$ auf einer Menge M ist eine Äquivalenzrelation.

128 Beispiel KONGRUENZRELATION
Sei $m \in \mathrm{N}$ eine natürliche Zahl, die wir *Modul* nennen wollen. Die *Kongruenzrelation modulo* m ist die Relation $\equiv_m \subseteq \mathrm{N}_0 \times \mathrm{N}_0$, bei der $x \equiv_m y$ genau dann gilt, wenn x und y bei Division durch m denselben Rest ergeben: $x \equiv_m y \Leftrightarrow \exists r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, n_x, n_y \in \mathrm{N}_0 : (x = n_x * m + r) \wedge (y = n_y * m + r)$. Wir lesen $x \equiv_m y$ als *x ist kongruent zu y modulo m*. Man sieht leicht, daß $\equiv_m$ eine Äquivalenzrelation auf N_0 ist.

Für $m, k \in \mathrm{N}$ heißt die Menge $[k]_m := \{l \in \mathrm{N} \mid k \equiv_m l\}$ aller Zahlen, die bei Division durch m denselben Rest wie k haben, die *Kongruenzklasse* von k unter dem Modul m. Es ist beispielsweise

$$\begin{array}{ll} [0]_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\} & [1]_2 = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} \\ [2]_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\} & [3]_2 = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} \end{array}$$

Insbesondere ist $[0]_2 = [2]_2 = [4]_2 = [6]_2 = \ldots$ und $[1]_2 = [3]_2 = [5]_2 = [7]_2 = \ldots$.
Wir stellen die folgenden Eigenschaften von Kongruenzklassen fest:

(1) Zwei Kongruenzklassen sind genau dann gleich, wenn sie von kongruenten Elementen aus gebildet werden.

(2) Je zwei unterschiedliche Kongruenzklassen sind disjunkt.

(3) Keine Kongruenzklasse ist leer, denn sie enthält zumindest das sie erzeugende Element.

(4) Die Vereinigung aller Kongruenzklassen ergibt die ursprüngliche Menge N.

129 Definition PARTITIONEN VON MENGEN
Sei M eine Menge. Eine *Partition (partition)* von M ist eine Menge P von Teilmengen von M, also $P \subseteq \mathcal{P}(M)$, für die folgende drei Eigenschaften gelten:

(1) Keine Teilmenge der Partition ist leer: $\emptyset \notin P$.

(2) Die Teilmengen der Partition sind paarweise disjunkt: $T_1, T_2 \in P \wedge T_1 \neq T_2 \Rightarrow T_1 \cap T_2 = \emptyset$

(3) Die Vereinigung aller Teilmengen der Partition ist die partitionierte Menge M:

$$\bigcup_{T \in P} T = M$$

130 Definition ÄQUIVALENZKLASSEN
Sei $\sim \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Zu jedem Element $m \in M$ heißt die Menge $[m]_\sim := \{x \in M \mid x \sim m\}$ die vom Element m erzeugte *Äquivalenzklasse (equivalence class)*. Jede Äquivalenzklasse ist eine Teilmenge von M. Die Menge $M \mid_\sim$ aller Äquivalenzklassen ist eine Teilmenge der Potenzmenge von M und heißt der *Quotient (quotient)* der Menge nach der Äquivalenzrelation.

131 Theorem PARTITIONEN UND ÄQUIVALENZRELATIONEN
Partitionen und Äquivalenzrelationen sind zwei unterschiedliche Aspekte derselben Sache:

Die Menge aller Äquivalenzklassen einer Menge M unter einer Äquivalenzrelation $\sim$ ist eine Partition von M: Insbesondere ist keine Äquivalenzklasse $[m]_\sim$ leer, da sie zumindest das sie erzeugende Element m enthält. Je zwei verschiedene Äquivalenzklassen haben einen leeren Durchschnitt und zwei Äquivalenzklassen $[m_1]_\sim$ und $[m_2]_\sim$ sind genau dann gleich, wenn sie äquivalent sind, also $m_1 \sim m_2$. Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ergibt die Menge M.

Ist umgekehrt M eine Menge und P eine Partition von M, dann ergibt sich diese Partition aus einer geeigneten Äquivalenzrelation auf M. Unter dieser Relation sind zwei Elemente genau dann äquivalent, wenn sie in derselben Menge der Partition liegen.

132 Beispiel RELATIONEN ZWISCHEN PROGRAMMEN
Sei X die Menge aller syntaktisch korrekten Fortran Programme, welche n Eingabewerte lesen und anschließend entweder in eine Endlosschleife gehen oder einen Wert ausgeben. Betrachten Sie die folgenden Relationen:

(1) $\sim_1 \subseteq X \times X$ mit $P \sim_1 Q$ genau dann, wenn die Programme P und Q für dieselben Eingabewerte terminieren.

(2) $\sim_2 \subseteq X \times X$ mit $P \sim_2 Q$ genau dann, wenn die Programme P und Q für jene Eingabewerte, für die beide Programme terminieren, dieselben Ausgabewerte ergeben.

(3) $\sim_3 \subseteq X \times X$ mit $P \sim_3 Q$ genau dann, wenn die Programme P und Q für dieselben Eingabewerte terminieren und dann auch dieselben Ausgabewerte liefern.

(4) $\sim_4 \subseteq X \times X$ mit $P \sim_4 Q$ genau dann, wenn die Programme P und Q beide für jede Eingabe terminieren und dann die selben Ergebnisse liefern.

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen?

133 Definition MÄCHTIGKEIT
Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Eine Menge A heißt *abzählbar unendlich (countably infinite)*, wenn sie unendlich viele Elemente enthält und gleichmächtig zur Menge N der natürlichen Zahlen ist. Sie heißt *abzählbar (countable)*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Eine unendliche Menge, die nicht abzählbar ist, nennt man *überabzählbar (uncountable)*.

134 Theorem CANTORSCHES DIAGONALVERFAHREN FÜR REELLE ZAHLEN
Die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist überabzählbar.

BEWEIS:
Wir zeigen diese Behauptung durch einen *indirekten Beweis*: Dazu nehmen wir an, es sei möglich, alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählen. Wir werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt: Somit muß sie falsch gewesen sein.

Wir nehmen also an, es gäbe eine Bijektion $a : \mathrm{N} \to (0, 1)$. Stellen wir die reellen Zahlen in Dezimalschreibweise dar, so erhalten wir eine Tabelle folgender Form:

$$
\begin{aligned}
&a(1) = 0.a_1^1 a_1^2 a_1^3 a_1^4 \dots\\
&a(2) = 0.a_2^1 a_2^2 a_2^3 a_2^4 \dots\\
&a(3) = 0.a_3^1 a_3^2 a_3^3 a_3^4 \dots\\
&a(4) = 0.a_4^1 a_4^2 a_4^3 a_4^4 \dots\\
&\dots\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Wir benutzen nie Darstellungen mit der Periode 9, um mehrdeutige Darstellungen von reellen Zahlen, wie etwa $0.01 = 0.009999\dots$ zu vermeiden. $a(i)$ ist die i–te Dezimalzahl der Kolonne, sie hat die Dezimaldarstellung $a(i) = 0.a_i^1 a_i^2 a_i^3 a_i^4 \dots$. Nun bilden wir die folgende *Diagonalzahl*: $d := 0.a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 a_5^5 \dots$ d ist also jene Zahl, welche in der "links-oben-rechts-unten" Diagonale, die auch *Hauptdiagonale* der Tabelle heißt, steht. Jetzt werden wir diese Zahl verändern: Jede Dezimalstelle in d wird um eins weitergezählt. Aus 0 wird 1, aus 1 wird 2, usw, aus 9 wird wieder 0, es erfolgt dabei aber *kein* Übertrag auf die nächst höhere Stelle. Nach Veränderung aller Dezimalstellen erhalten wir eine neue Zahl d'. Diese Zahl ist wieder eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, sie steht aber nicht in dieser Tabelle, da sie sich jeweils von der i–ten Zahl $a(i)$ an der i–ten Stelle a_i^i unterscheidet. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß eine solche Tabelle möglich wäre, respektive daß a surjektiv sein könnte. $\Box$

135 Theorem CANTORSCHES DIAGONALVERFAHREN FÜR FUNKTIONEN
Die Menge aller Funktionen vom Typus $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ ist überabzählbar.

BEWEIS:
Wieder arbeiten wir mit einem indirekten Beweis. Wir nehmen an, es gäbe eine Bijektion von N auf diese Menge von Funktionen: $\{f(1), f(2), f(3), \dots\}$ wäre dann die Menge aller dieser Funktionen und $f(3)(17)$ wäre die dritte Funktion im Sinne dieser Aufzählung, angewandt auf das Argument 17. Nun bilden wir die *Diagonalfunktion* d durch $d(i) := f(i)(i)$ und verändern sie zu einer Funktion d' mit $d'(i) := d(i) + 1 = f(i)(i) + 1$. Diese Funktion d' ist wieder eine Funktion des Typus $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$. f ist nicht surjektiv, da die modifizierte Diagonalfunktion d' nicht in ihrem Bild auftaucht. Wäre nämlich $d' = f(j)$ für ein geeignetes j, dann wären diese zwei Funktionen für alle Argumente gleich, also auch im Argument j. Aufgrund $d'(j) = f(j)(j) + 1 \neq f(j)(j)$ führt dies auf einen Widerspruch. $\Box$

136 Bemerkung PROGRAMM- UND FUNKTIONSMENGEN
Die Menge aller syntaktisch korrekten Pascal Programme ist abzählbar. Hierzu betrachte man der Reihe nach alle Wörter der Länge 1, dann der Länge 2, dann der Länge 3 usw. in alphabetischer Anordnung. Anschließend streiche man alle Wörter, die kein syntaktisch korrektes Pascal Programm darstellen und man erhält eine Aufzählung aller Pascal Programme. Die Menge aller Funktionen des Typus

$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist aber nicht abzählbar. Der Leser vermutet richtig, daß es somit viele Funktionen geben muß, die nicht durch ein Pascal Programm berechnet werden können.

137 Beispiel MÄCHTIGKEIT

(1) Beweisen Sie, daß zwei endliche Mengen genau dann gleichmächtig sind, wenn sie gleich viele Elemente besitzen.

(2) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen und $\simeq \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ die Relation der Gleichmächtigkeit: Für zwei Mengen $A, B \in \mathcal{M}$ gelte $A \simeq B$ genau dann, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. Zeigen Sie, daß die Relation $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist. Eine *Kardinalzahl* ist eine Äquivalenzklasse unter $\simeq$. Was bedeutet das anschaulich?

(3) Zeigen Sie, daß die Menge der geraden Zahlen, die Menge der Primzahlen und die Menge aller Pascal Programme abzählbar sind.

4.7 Hüllen

138 Definition TRANSITIVE HÜLLE

Sei M eine Menge und $\Gamma \subseteq M \times M$ eine Relation. Die *transitive Hülle (transitive closure)* von Γ ist die Relation $<\Gamma>_t \subseteq M \times M$, definiert durch

$$(x, y) \in <\Gamma>_t \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in \Gamma & \text{oder} \\ \exists t_1 \in M : (x, t_1), (t_1, y) \in \Gamma & \text{oder} \\ \exists t_1, t_2 \in M : (x, t_1), (t_1, t_2), (t_2, y) \in \Gamma & \text{oder} \\ & \vdots \end{cases}$$

Knapper kann man schreiben:

$$(x, y) \in <\Gamma>_t \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma \vee \exists n \in \mathbb{N} :$$

$$\exists t_1, t_2, \ldots, t_n : (x, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n), (t_n, y) \in \Gamma$$

139 Beispiel DAS PROBLEM DER ZUGVERBINDUNGEN

Sei M eine Menge von Städten und $\Gamma \subseteq M \times M$ eine Relation, welche die bestehenden Zugsverbindungen beschreibt: $(m_1, m_2) \in \Gamma$ genau dann, wenn es einen Zug gibt, der von der Stadt m_1 ohne Halt in die Stadt m_2 fährt. Nun seien zwei Städte s_1 und s_2 gegeben. Offensichtlich kann man von s_1 genau dann mit Zugverbindungen nach s_2 kommen, wenn (s_1, s_2) in der transitiven Hülle von Γ liegt.

140 Beispiel KOMPONENTEN–PROBLEM
Sei T eine Menge von Einzelteilen und halbfertigen Teilen für eine Konstruktion, etwa ein Auto. Eine binäre Relation $\Gamma \subseteq T \times T$ beschreibe das Verhältnis des "Eingebautwerdens als Komponente". Für zwei Teile t_1 und t_2 gilt $(t_1, t_2) \in \Gamma$ genau dann, wenn das Teil t_1 beim Zusammenbau des Teils t_2 unmittelbar benötigt wird.

Im Beispiel eines Autos gilt etwa (ABS-Kontrollrechner, ABS-System) $\in \Gamma$ und (ABS-System, Bremsanlage) $\in \Gamma$ aber (ABS-Kontrollrechner, Bremsanlage) $\in \Gamma$ gilt nicht, da beim Zusammenbau der Bremsanlage auf dem Fließband das ABS-System bereits zusammengesetzt sein muß.

Nun seien zwei Teile s_1 und s_2 gegeben. Der Teil s_1 ist im Teil s_2 genau dann als mittelbarer oder unmittelbarer Bestandteil enthalten, wenn (s_1, s_2) in der transitiven Hülle der Komponentenrelation Γ liegt.

Seine besondere Bedeutung und seinen Namen erhielt dieses Problem von Datenbanken im Fertigungsbereich. Mit der Datenbankabfragesprache SQL in der ursprünglichen, nicht erweiterten Form, war es nämlich nicht möglich, eine Abfrage (query) so zu formulieren, daß sich eine Antwort auf das Komponentenproblem *Welche Teile sind alle im Teil X enthalten?* ergab. Da ein Datenbanksystem solche Fragen aber beantworten sollte, mußte SQL erweitert werden.

141 Beispiel AUSWERTUNG EINES SPREADSHEETS
Gegeben sei eine Menge Z von Zellen eines Spreadsheets. $\Gamma \subseteq Z \times Z$ beschreibe die Zellzusammenhänge in der folgenden Art und Weise: $(z_1, z_2) \in \Gamma$ genau dann, wenn der Wert der Zelle z_1 in der Formel referenziert wird, die in der Zelle z_2 steht. Welche Relation drückt nun aus, daß eine Zelle z_1 einen Einfluß auf eine Zelle z_2 haben kann, daß sich also bei Änderung des Wertes von z_1 und Neuberechnung der Spreadsheet Werte eine Änderung von z_2 ergeben kann?

142 Definition WICHTIGE HÜLLEN
Sei M eine Menge und $\Gamma \subseteq M \times M$ eine Relation. Die *symmetrische Hülle (symmetric closure)* von Γ ist die Relation $<\Gamma>_s \subseteq M \times M$, definiert durch

$$(x, y) \in <\Gamma>_s \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma \lor (y, x) \in \Gamma$$

Äquivalent dazu ist die Definition $<\Gamma>_s := \Gamma \cup \Gamma^*$.

Die *reflexiv-transitive Hülle (reflexive transitive closure)* von Γ ist die Relation $<\Gamma>_{rt} \subseteq M \times M$, definiert durch

$$(x, y) \in <\Gamma>_{rt} \Leftrightarrow (x, y) \in <\Gamma>_t \lor x = y$$

Äquivalent dazu ist $<\Gamma>_{rt} := <\Gamma>_t \cup \Delta_M$.

Die *reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle (reflexive symmetric transitive closure)* von Γ ist die Relation $<\Gamma>_{rst} \subseteq M \times M$, die als die reflexiv-transitive Hülle der symmetrischen Hülle definiert ist. Sie ist die kleinste Erweiterung der Relation Γ, die eine Äquivalenzrelation ist.

143 Beispiel HÜLLEN
Geben Sie zu der Relation $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ auf der Menge $\{1,2,3,4,5\}$ die transitive, die symmetrische, die reflexiv-transitive und die reflexiv-transitiv-symmetrische Hülle an. Letztere ist eine Äquivalenzrelation. Geben Sie ihre Äquivalenzklassen und die durch sie erzeugte Partitionierung dieser Menge an.

Bilden Sie die reflexive Hülle der Relation $\{(a,b)\}$. Ist diese Aufgabe so korrekt gestellt?

144 Bemerkung EIGENSCHAFTEN VON HÜLLEN
Sei M eine Menge, $\Phi \subseteq M \times M$ eine Relation und $<\Phi>_t \subseteq M \times M$ die transitive Hülle von Φ. Man beobachtet:

(1) Die transitive Hülle $<\Phi>_t$ von Φ ist eine *Erweiterung (extension)* von Φ, das heißt $<\Phi>_t \supseteq \Phi$. Ist nämlich ein Paar (x,y) in Relation, also $(x,y) \in \Phi$, so ist es auch in der transitiven Hülle, also $(x,y) \in <\Phi>_t$. Bilden der transitiven Hülle macht eine Relation größer.

(2) Die transitive Hülle von Φ ist die kleinste Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times M$, welche die Relation Φ enthält und transitiv ist.

(3) Die transitive Hülle von Φ ist der Durchschnitt aller Relationen, die Φ enthalten und transitiv sind.

(4) Die transitive Hülle ist eine transitive Relation. Dies ist vom Namen her zwar zu erwarten, von unserer Definition her aber keineswegs selbstverständlich und muß deshalb auch gesondert bewiesen werden.

Analoge Aussagen gelten für alle anderen Hüllen, die über einer geeigneten Eigenschaft P, etwa "transitiv" oder "symmetrisch", gebildet werden können. Man kann aber nicht zu jeder Eigenschaft eine Hülle bilden.