



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Prädikatenlogik



Gottlob Frege 1848-1925



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



All-Quantor

$\forall(i): B(i): Z(i)$

All i: B(i): Z(i)

Z(i) gilt für alle i aus dem Bereich B(i)

All i: false: Z(i) = true



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Beispiele

- | | | |
|--|------------|--|
| All $i: 0 \leq i < N: a_i = 0$ | ... | alle a_i sind Null |
| All $i: 1 \leq i < N: a_{i-1} < a_i$ | ... | a ist monoton steigend |
| All $i, j: 0 \leq i < j < N: a_i < a_j$ | ... | a ist monoton steigend |
| All $i, j: 0 \leq i, j < N: a_i = a_j$ | ... | alle Elemente von a sind gleich |
| All $i: 0 \leq i < N: a_i \leq a_j$ | ... | a_j ist das grösste Element von a |



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Existenz-Quantor

$\exists(i): B(i): Z(i)$

Ex i: B(i): Z(i)

Es existiert ein i im Bereich B(i) für das Z(i) gilt

Ex i: false: Z(i) = false



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Beispiele

Ex i : $0 \leq i < N$: $a_i = 0$

not (Ex i : $1 \leq i < N$: $a_{i-1} \geq a_i$)

Ex i, j : $0 \leq i < j < N$: $a_i \neq a_j$

... mindestens ein a_i ist Null

... a ist monoton steigend

**... mindestens zwei Elemente
von a sind verschieden**



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



De Morgan

$$\text{not } (\text{Ex } i: B(i): Z(i)) = \text{All } i: B(i): \text{not } Z(i)$$

„Es existiert kein i im Bereich $B(i)$ für das $Z(i)$ gilt“
ist gleichbedeutend mit
„Für alle i im Bereich $B(i)$ gilt nicht $Z(i)$ “



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Rechenregeln

$\text{All } i: B(i): (P(i) \text{ and } Q(i)) \Leftrightarrow (\text{All } i: B(i): P(i)) \text{ and } (\text{All } i: B(i): Q(i))$

$\text{Ex } i: B(i): (P(i) \text{ or } Q(i)) \Leftrightarrow (\text{Ex } i: B(i): P(i)) \text{ or } (\text{Ex } i: B(i): Q(i))$

$(\text{All } i: B(i): P(i)) \text{ or } (\text{All } i: B(i): Q(i)) \Rightarrow \text{All } i: B(i): (P(i) \text{ or } Q(i))$

$\text{Ex } i: B(i): (P(i) \text{ and } Q(i)) \Rightarrow (\text{Ex } i: B(i): P(i)) \text{ and } (\text{Ex } i: B(i): Q(i))$



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



De Morgan

$$\text{not (All } i: B(i): Z(i)) = \text{Ex } i: B(i): \text{not } Z(i)$$

**„Nicht für alle i im Bereich $B(i)$ gilt $Z(i)$ “
ist gleichbedeutend mit**

„Es existiert ein i im Bereich $B(i)$ für das $Z(i)$ nicht gilt“



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Beispiele

$(\text{Ex } i: 0 \leq i < N: a_i \neq 0) = \text{not } (\text{All } i: 0 \leq i < N: a_i = 0)$

$(\text{All } i: 1 \leq i < N: a_{i-1} < a_i) = \text{not } (\text{Ex } i: 1 \leq i < N: a_{i-1} \geq a_i)$

$(\text{Ex } i, j: 0 \leq i < j < N: a_i \neq a_j) = \text{not } (\text{All } i, j: 0 \leq i < j < N: a_i = a_j)$



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Beispiel

geg.: $a[0..N-1]$, $N \geq 3$

ges.: i, j, k so, dass i der Index des grössten Elementes, j der Index des zweitgrössten Elementes und k der Index des drittgrössten Elementes von a ist

Ex i, j, k : $(0 \leq i, j, k < N)$ and $(i \neq j)$ and $(i \neq k)$ and $(j \neq k)$:

$(a_i \geq a_j \geq a_k)$ and $(\text{All } m: (0 \leq m < N) \text{ and } (m \neq i, j, k): a_k \geq a_m)$



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Beispiel für die Mehrdeutigkeit verbaler Zusicherungen

„Alle Elemente von a sind entweder Null oder Eins“
kann interpretiert werden als

All $i: 0 \leq i < N: (a_i=0) \text{ or } (a_i=1)$

oder aber als

$(\text{All } i: 0 \leq i < N: a_i=0) \text{ or } (\text{All } i: 0 \leq i < N: a_i=1)$



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Anz-Quantor

Anz i: B(i): Z(i)

**liefert die Anzahl aller i aus dem Bereich B(i) für
die Z(i) gilt**

Anz i: false: Z(i) = 0



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Anz-Quantor

$((\text{Anz } i: B(i): Z(i))=0) \Leftrightarrow \text{All } i: B(i): \text{not } Z(i)$

$((\text{Anz } i: B(i): Z(i))\geq 0) \Leftrightarrow \text{Ex } i: B(i): Z(i)$



Beispiele

- $(\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i = 0) = 0$... alle a_i sind ungleich Null
- $(\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i = x) > 0$... mindestens ein a_i hat den Wert x
- $(\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i < x) = (\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i > x)$
... x ist der Median von a
- All $x:: ((\text{Anz } i: 0 \leq i < N: a_i = x) = (\text{Anz } i: 0 \leq i < N: b_i = x))$
... a ist eine Permutation von b



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Sum-Quantor

Sum i: B(i): A(i)

**liefert die Summe der Ausdrücke A(i) für alle i
aus dem Bereich B(i)**

Sum i: false: A(i) = 0

(Anz i: B(i): Z(i)) = (Sum i: B(i) and Z(i): 1)



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Beispiele

- $(\text{Sum } i: 1 \leq i \leq n: i) = n(n+1)/2$... Summe der natürlichen Zahlen**
 $(\text{Sum } i: 0 \leq i < n: 2i+1) = n^2$... Summe der ungeraden Zahlen
 $(\text{Sum } i: 0 \leq i < n: 2^i) = 2^n - 1$... Summe der Potenzen von 2



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Min-Quantor

Min i: B(i): A(i)

liefert den kleinsten Wert der Ausdrücke A(i) für alle i aus dem Bereich B(i)

(Min i: false: A(i)) = $+\infty$

$(m = (\text{Min } i: 0 \leq i < N: a[i])) = ((\text{Ex } i: 0 \leq i < N: m = a[i]) \text{ and } (\text{All } i: 0 \leq i < N: m \leq a[i]))$



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich



Max-Quantor

Max i: B(i): A(i)

**liefert den grössten Wert der Ausdrücke A(i) für alle
i aus dem Bereich B(i)**

(Max i: false: A(i)) = $-\infty$

(Max i: B(i): A(i)) = (-Min i: B(i): -A(i))

(Min i: B(i): A(i)) = (-Max i: B(i): -A(i))