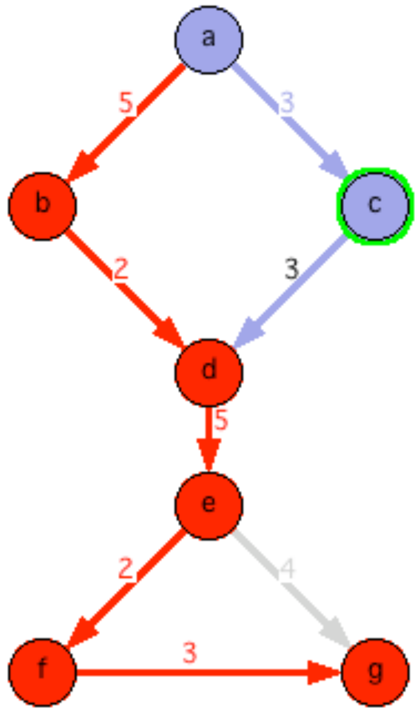
Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

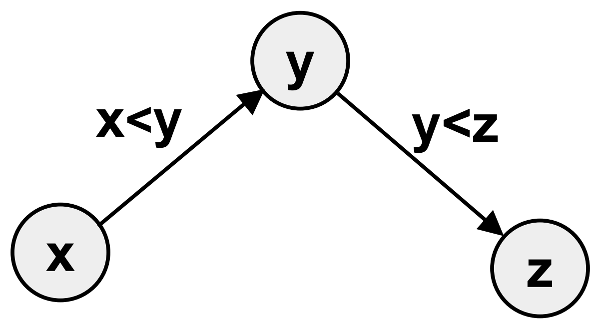


Graphen (2)

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Topologisches Sortieren (1)

Die Kanten eines gerichteten zyklenfreien Graphen bilden eine Halbordnung (die Ordnungsrelation ist nur für solche Knoten definiert die am gleichen Pfad liegen).



Eine strenge Halbordnung ist irreflexiv $\neg(x<x)$ und transitiv
$x<y$ and $y<z \Rightarrow x<z$

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Topologisches Sortieren (2)

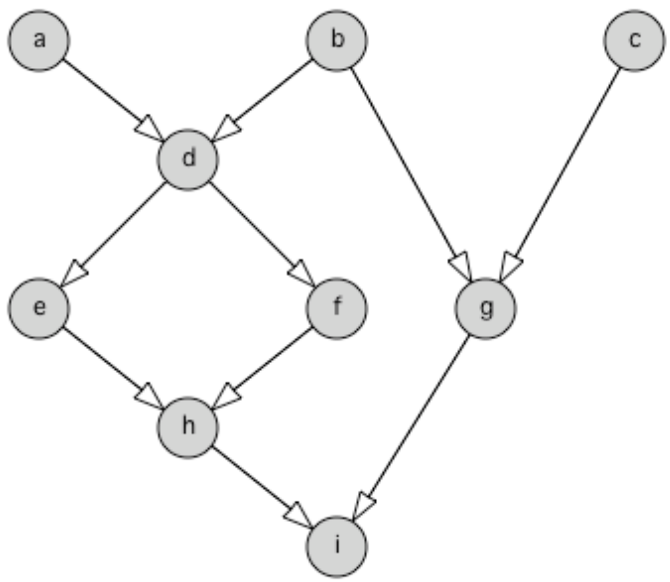
O(|V|+|E|)

Topologisches Sortieren bringt die Knoten eines gerichteten zyklenfreien Graphen in eine Reihenfolge, die mit der Halbordnung verträglich ist.

Die umgekehrte postorder-Reihenfolge entspricht einer solchen topologischen Sortierung.

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Topologisches Sortieren (3)
Beispiel:



Eine bei a beginnende Tiefensuche liefert die postorder-Reihenfolge

ihefdagbc

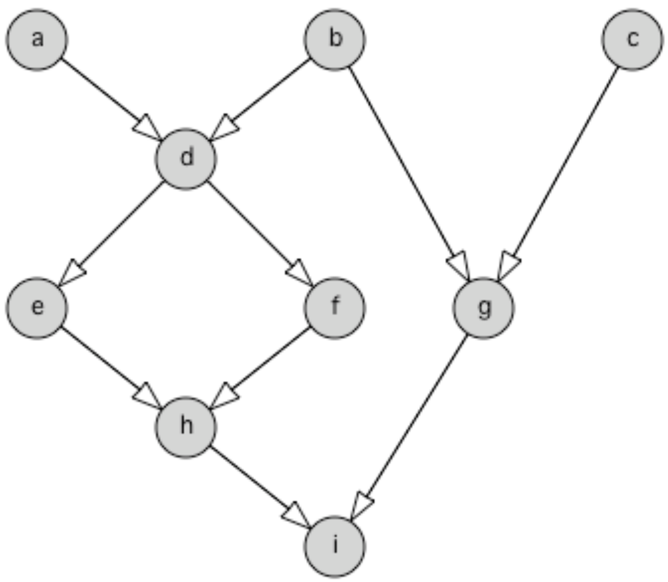
Die umgekehrte Reihenfolge

cbgadfehi

ist topologisch sortiert

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Topologisches Sortieren (4)
Beispiel:



Eine bei c beginnende Tiefensuche liefert die postorder-Reihenfolge

igchefdba

Die umgekehrte Reihenfolge

abdfehcgi

ist ebenfalls topologisch sortiert

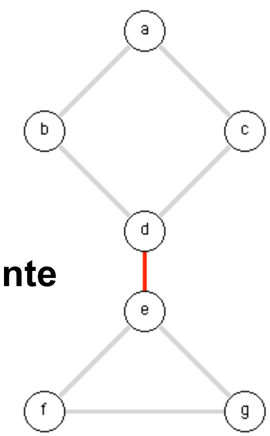
Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

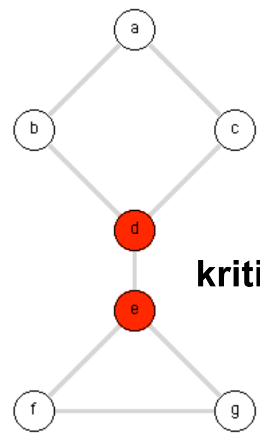
Artikulationspunkte (1)

Kanten und Knoten eines ungerichteten Graphen sind dann kritisch wenn sich bei ihrer Entfernung die Anzahl der Komponenten des Graphen erhöht.

Beispiel:

kritische Kante





kritische Knoten

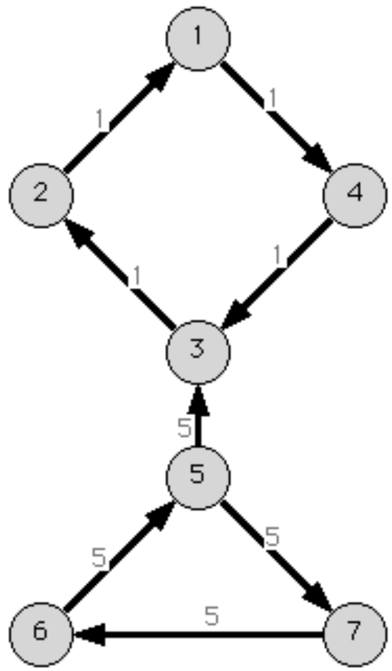
Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Artikulationspunkte (2)

O(|V|+|E|)

Zur Ermittlung der Artikulationspunkte werden die Knoten des Graphen während einer Tiefensuche in preorder Reihenfolge durchnummeriert und bei der Rückkehr aus der Tiefensuche jeder Kante die kleinste Nummer aller über diese Kante erreichbaren Knoten zugewiesen.

Beispiel:

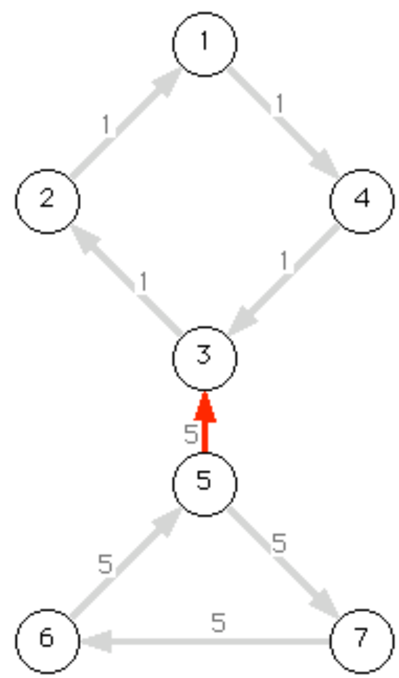


Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Artikulationspunkte (3)

Eine Kante ist genau dann kritisch wenn die kleinste über sie erreichbare Knotennummer grösser ist als die Nummer des Knotens von dem aus sie während der Tiefensuche traversiert worden ist.

Beispiel:

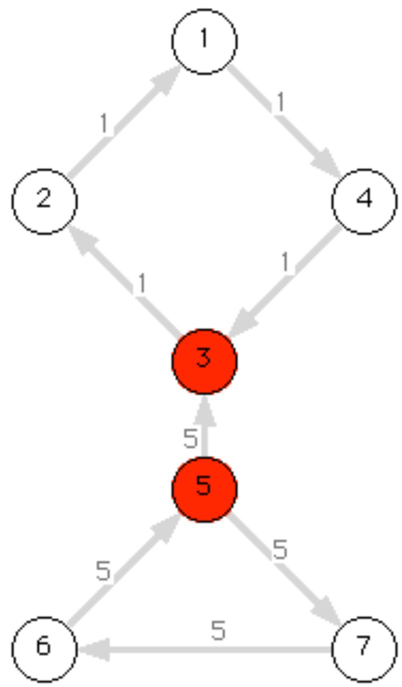


Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Artikulationspunkte (4)

Ein Knoten (mit Ausnahme des Startknotens) ist genau dann kritisch wenn bei der Tiefensuche für mindestens eine der von ihm ausgehenden Kanten die kleinste über diese während der Tiefensuche erreichbare Knotennummer grösser oder gleich der Nummer dieses Knotens ist.

Beispiel:

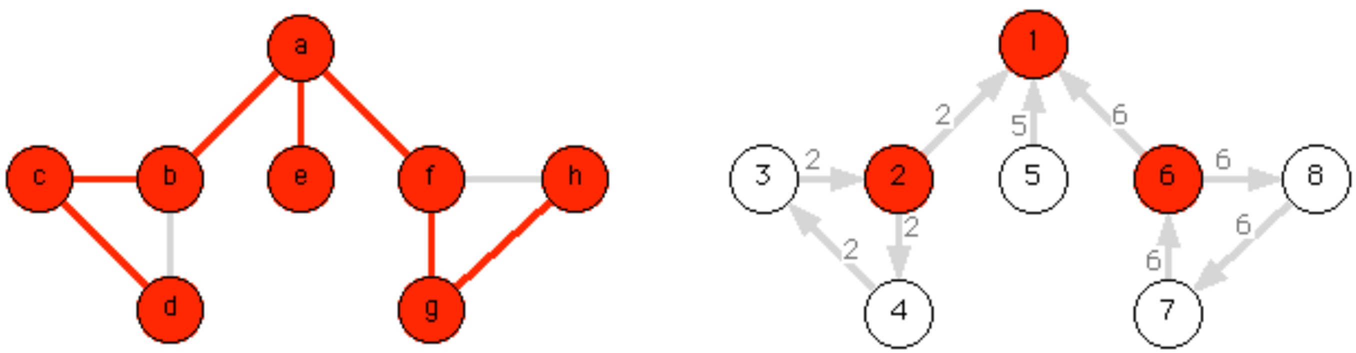


Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Artikulationspunkte (5)

Der Startknoten der Tiefensuche ist genau dann kritisch wenn von der Wurzel des bei der Tiefensuche generierten spannenden Baumes mehr als eine Kante ausgeht.

Beispiel:



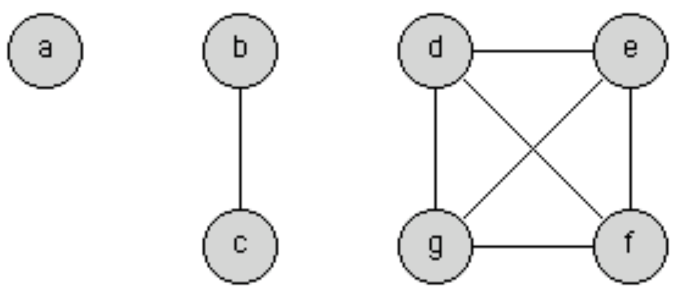
Von der Wurzel a des spannenden Baumes gehen drei Kanten aus, sie ist daher kritisch!

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Komponenten eines ungerichteten Graphen
O(|V|+|E|)

Eine Komponente eines ungerichteten Graphen ist ein maximaler Teilgraph in dem jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist. Die Komponenten können beim Traversieren mittels Tiefen- oder Breitensuche ermittelt werden.

Beispiel: ungerichteter Graph mit drei Komponenten



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Zweifach zusammenhängende Komponenten eines ungerichteten Graphen (biconnected components)

O(|V|+|E|)

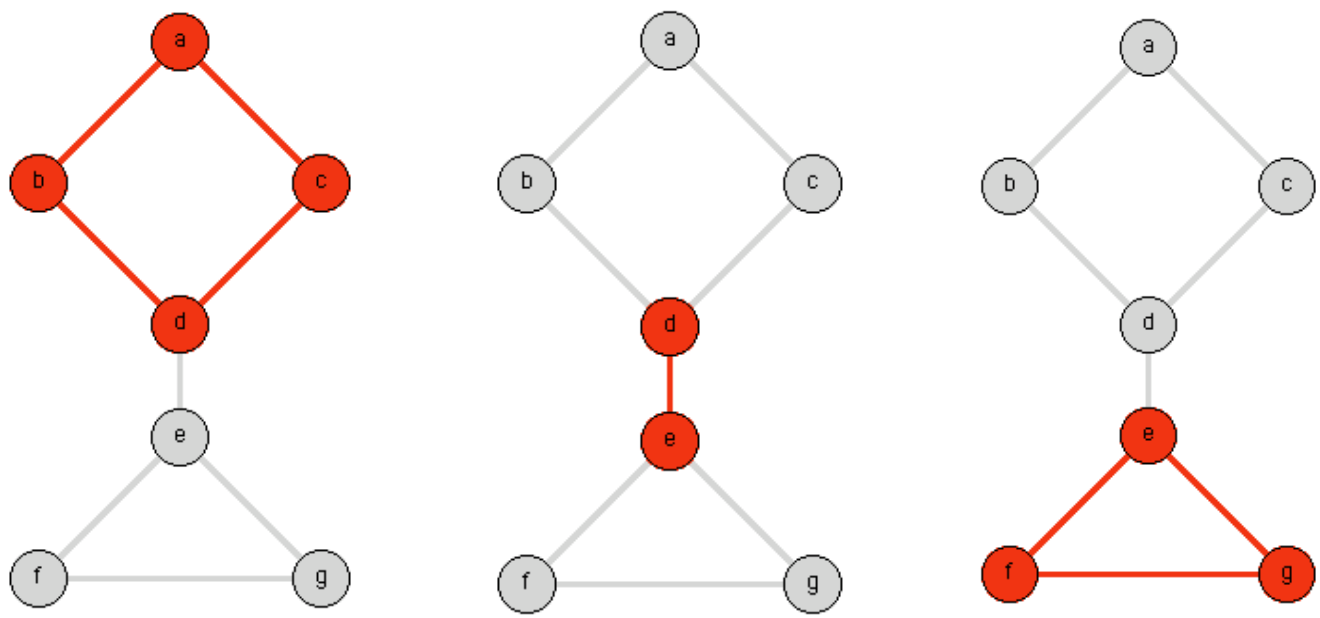
Eine zweifach zusammenhängende Komponente eines ungerichteten Graphen ist ein maximaler Teilgraph der auch nach dem Entfernen eines beliebigen Knotens zusammenhängend bleibt.

Eine zweifach zusammenhängende Komponente enthält somit keine kritischen Knoten.

Die zweifach zusammenhängenden Komponenten können beim Aufsuchen der kritischen Knoten ermittelt werden.

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Beispiel: Zweifach zusammenhängende Komponenten eines ungerichteten Graphen



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Schwach zusammenhängende Komponenten eines gerichteten Graphen (weakly connected components)

$O(|V|+|E|)$

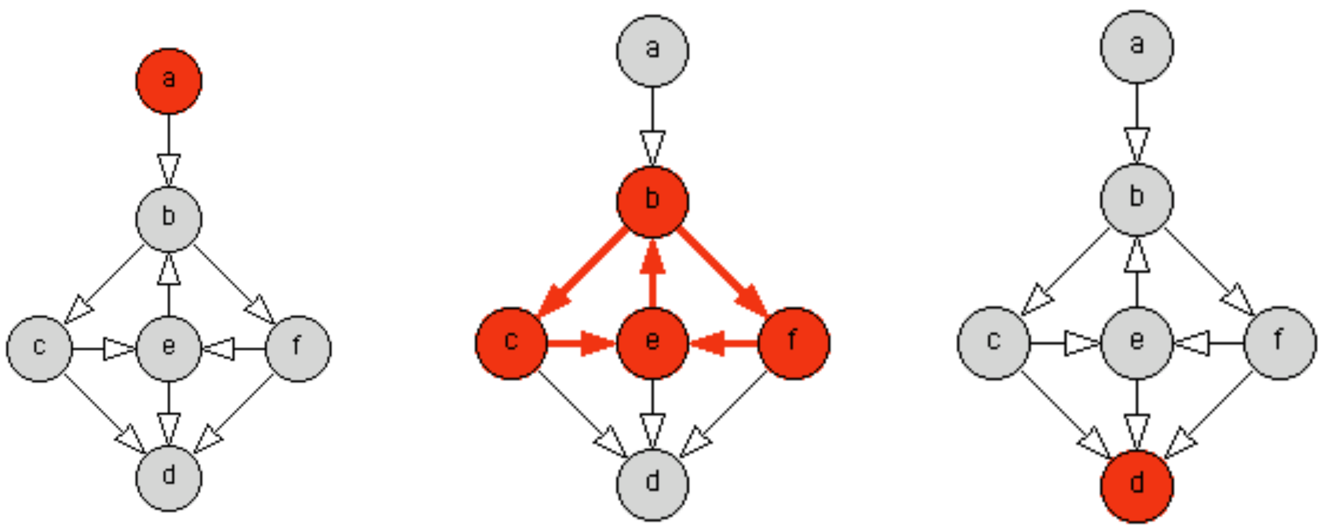
Die schwach zusammenhängende Komponenten eines gerichteten Graphen entsprechen den Komponenten jenes Graphen der entsteht wenn sämtliche gerichtete Kanten durch ungerichtete Kanten ersetzt werden.

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Stark zusammenhängende Komponenten eines gerichteten Graphen (strongly connected components)

Eine stark zusammenhängende Komponente eines gerichteten Graphen ist ein maximaler Teilgraph in dem jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.

Beispiel:



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Stark zusammenhängende Komponenten eines gerichteten Graphen (strongly connected components)

O(|V|+|E|)

Die stark zusammenhängenden Komponenten eines gerichteten Graphen können mittels folgendem Algorithmus gebildet werden:

1) **Nummeriere alle Knoten des Graphen in preorder Reihenfolge einer Tiefensuche**
2) **Bilde den "inversen" Graphen durch Umkehren der Orientierung aller Kanten**
3) **Ermittle alle spannenden Bäume des inversen Graphen durch Tiefensuche in der Reihenfolge der Nummerierung der Knoten**

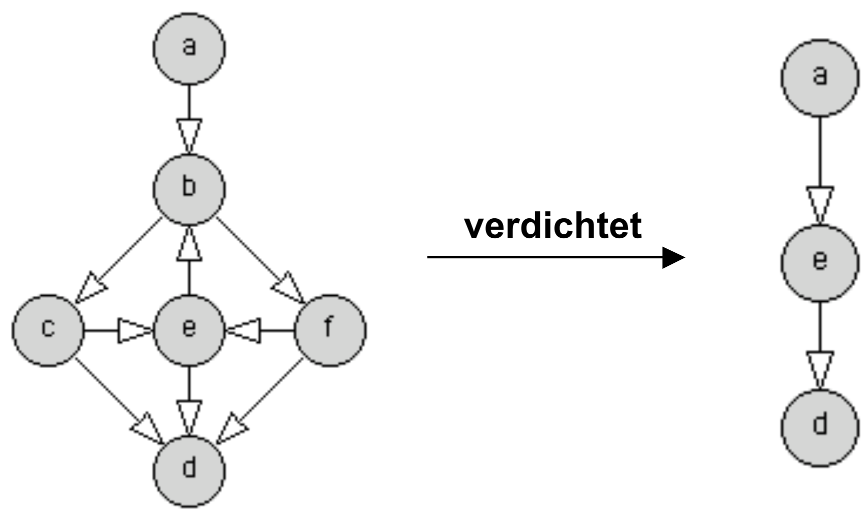
Die Knoten jedes spannenden Baumes bilden gemeinsam mit den sie verbindenden Kanten des ursprünglichen Graphen die stark zusammenhängenden Komponenten

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Verdichten eines gerichteten Graphen

Ersetzt man jede stark zusammenhängende Komponente eines gerichteten Graphen durch einen einzigen Knoten so entsteht ein zyklenfreier "verdichteter" Graph.

Beispiel:



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Ermittlung aller Pfade

Löscht man bei einer rekursiven Tiefensuche die Markierung jedes Knotens nachdem alle seine Kanten durchlaufen worden sind, so bilden die entstehenden Folgen aktiver Kanten alle möglichen Pfade dieses Graphen.

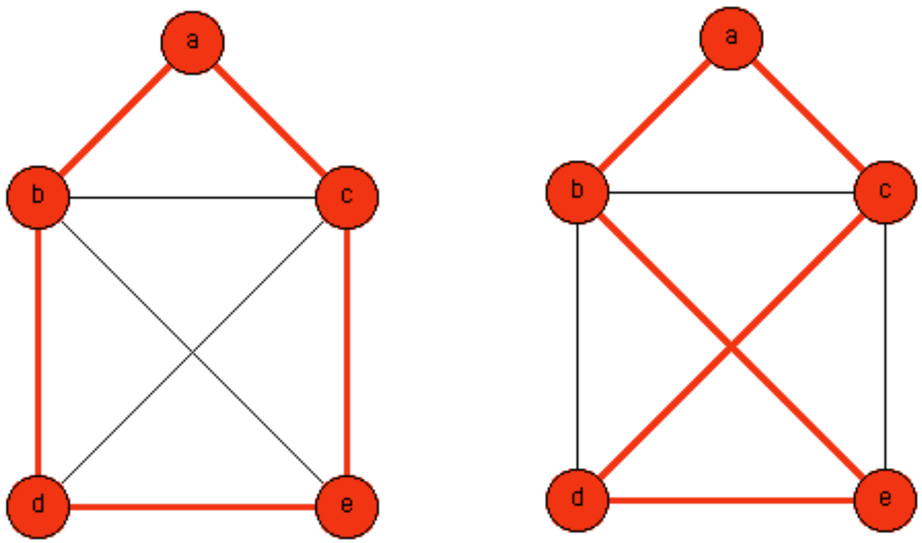
Betrachtet man nur solche Pfade, die zu markierten Knoten führen, so erhält man alle Zyklen des Graphen.

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Ermittlung aller Hamiltonzyklen

Ein Hamiltonzyklus enthält jeden Knoten des Graphen genau einmal.

Beispiel: ungerichteter Graph mit zwei Hamiltonzyklen

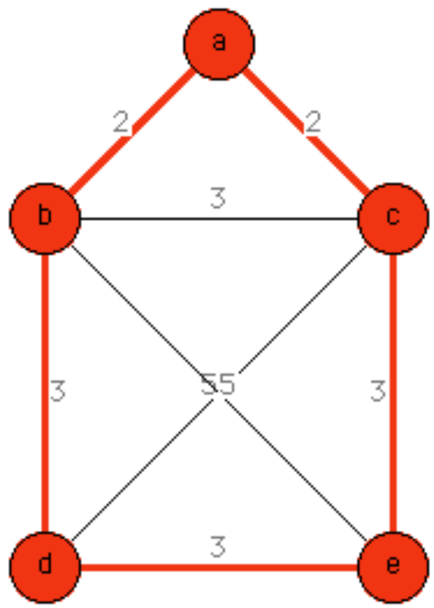


Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Travelling Salesman Problem

Ermittlung des kürzesten Hamiltonzyklus eines gewichteten Graphen.

Beispiel:

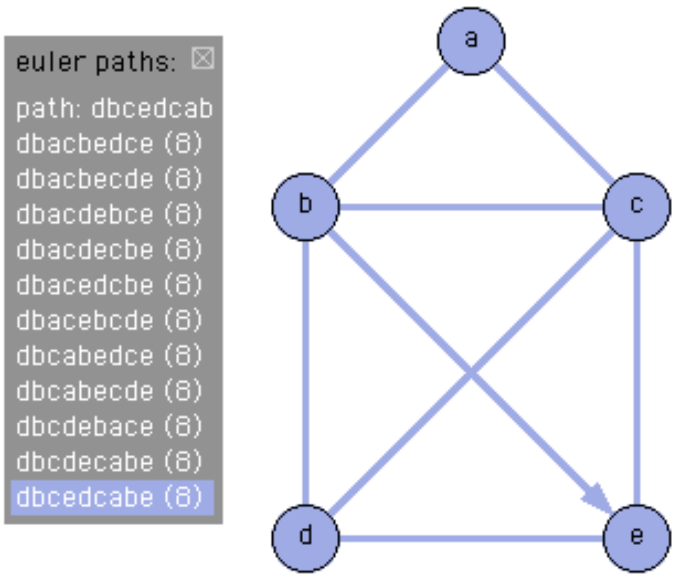


Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Ermittlung aller Eulerpfade

Ein Eulerpfad enthält jede Kante des Graphen genau einmal.

Beispiel: ungerichteter Graph mit einigen seiner Eulerpfade



Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Maximaler Fluss (1)

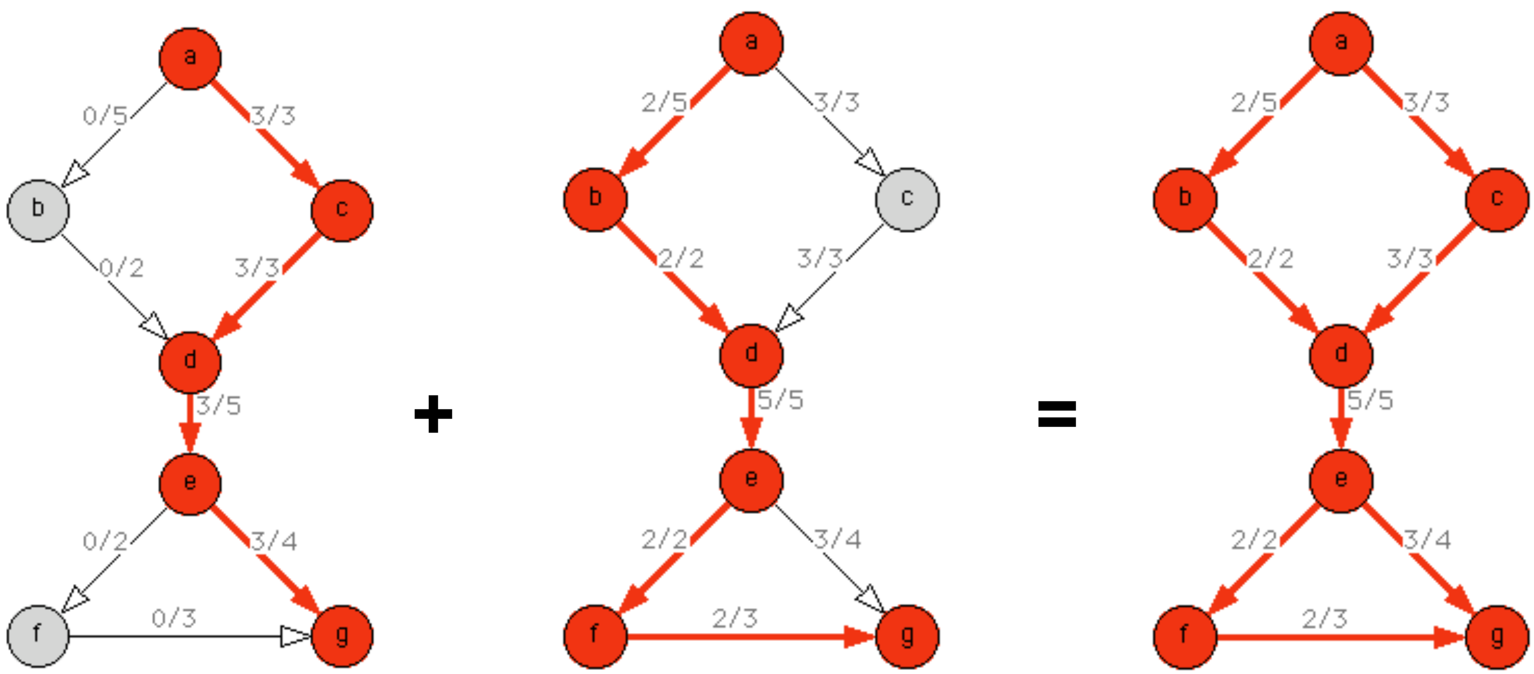
$O(|V|.|E|^2)$

In einem gerichteten azyklischen Graphen (einem sogenannten Netzwerk) können die Gewichte der Kanten als maximale Kapazität des über die jeweilige Kante transportierten Anteil eines Flusses interpretiert werden.

Gesucht ist der maximale Fluss (maximum flow) der von einem Knoten q (der Quelle) zu einem Knoten s (der Senke) über alle existierenden Pfade transportiert werden kann.

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Maximaler Fluss (2)
Beispiel:



Fluss = 3 **Fluss = 2** **Fluss = 5**

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Maximale Zuordnung (1)

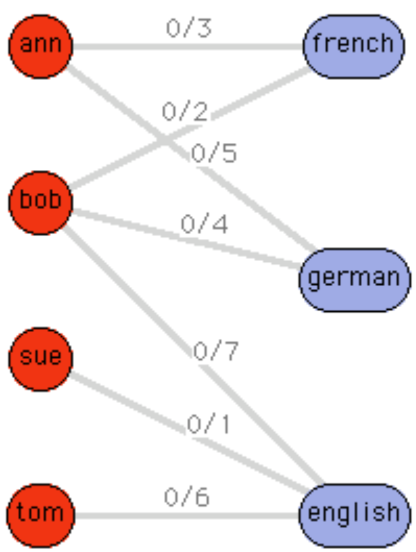
In einem bipartiten Graphen können die Gewichte der Kanten als Präferenzen einer Zuordnung der zu der jeweilige Kante inzidenten Knoten interpretiert werden.

Eine maximale Zuordnung (maximum matching) ist ein Teilgraph in dem von jedem Knoten maximal eine Kante ausgeht und die Summe der Gewichte aller Kanten maximal ist.

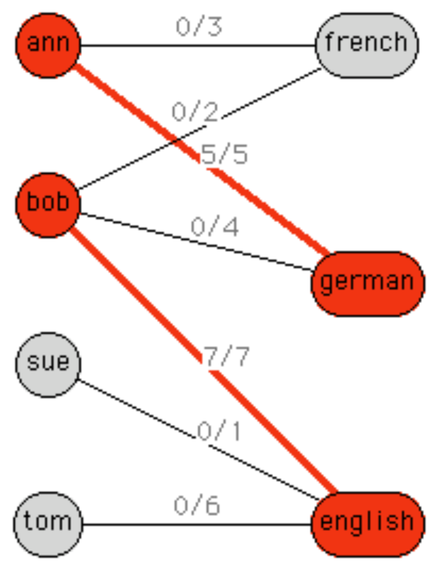
Das Problem der maximalen Zuordnung kann auf das Problem der Ermittlung des maximalen Flusses von einer virtuellen Quelle zu einer virtuellen Senke zurückgeführt werden. Die Quelle speist dabei den einen Teil der Knoten des bipartiten Graphen während die Senke den sich ergebenden maximalen Fluss vom anderen Teil der Knoten aufnimmt.

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

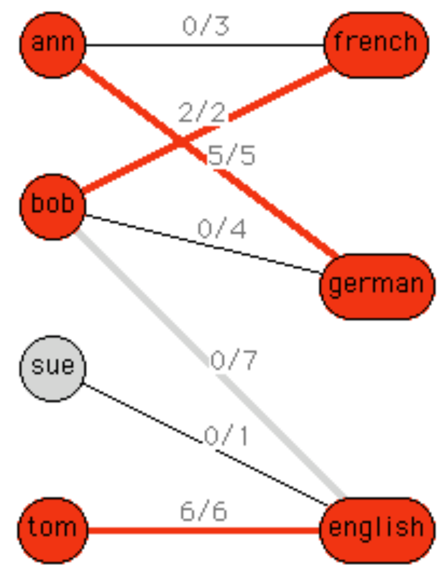
Maximale Zuordnung (2)
Beispiel:



gegebener bipartiter Graph



suboptimale Zuordnung



optimale Zuordnung

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Stable Marriage

O(n)

Gegeben seien n unverheiratete Männer und ebensoviele unverheiratete Frauen sowie für jede Person die Rangfolge der Präferenzen für die Personen des jeweils anderen Geschlechts. Männer und Frauen können als Knoten eines bipartiten Graphen modelliert werden.

Gesucht ist eine "stabile" Zuordnung zwischen Männern und Frauen (Heirat) mit der Eigenschaft, dass es keine zwei Personen unterschiedlichen Geschlechts gibt, deren Präferenzen füreinander jeweils höher sind als für ihren zugeordneten (Ehe-)Partner.

Algorithmus (von den Männern ausgehend):

Die alleinstehenden Männer bewerben sich der Reihe nach und in der Rangfolge ihrer Präferenzen um die Frauen. Ist die beworbene Frau alleinstehend so willigt sie ein und es kommt zur Verlobung. Ist die beworbene Frau bereits verlobt und hat der Bewerber höhere Präferenz als ihr momentaner Verlobter so löst sie die Verlobung und verlobt sich mit dem Bewerber. Sobald alle Personen verlobt sind kommt es zur Hochzeit.

Helmut Schauer
Educational Engineering Lab
Department for Information Technology
University of Zurich

Stable Marriage
Beispiel:

Präferenzlisten:

ann:	**sam, tom, ralf**	**ralf:**	**berta, cindy, ann**
berta:	**tom, sam, ralf**	**sam:**	**berta, cindy, ann**
cindy:	**sam, ralf, tom**	**tom:**	**cindy, ann, berta**

Verlobungen (von Frauen ausgehend):

~~ann - sam~~
~~berta - tom~~
~~cindy - sam~~
ann - tom
berta - sam
cindy - ralf

Verlobungen (von Männern ausgehend):

~~ralf - berta~~
sam - berta
~~tom - cindy~~
ralf - cindy
tom - ann